WiSe 2007/08 11.1.2008

Prof. Dr. T. Franosch
Marta Balbás Gambra/Tobias Munk/Benedikt Obermayer

am Lehrstuhl für Statistische Physik
Biologische Physik & Weiche Materie
Arnold-Sommerfeld-Zentrum für Theoretische Physik
www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey

Ludwig Maximilians Universität

R: Rechenmethoden der Theoretischen Physik

(Prof. T. Franosch)

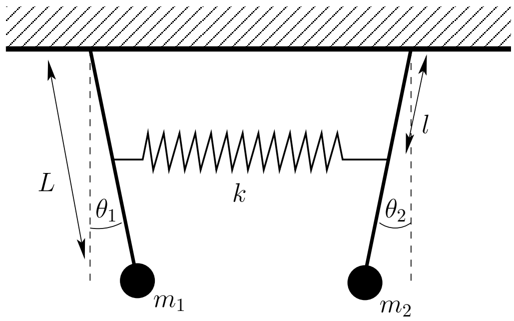
Übungsblatt 12

Tutoriumsaufgabe 12.1 *Stationäre Punkte*

Die Energie eines Systems aus zwei Pendeln mit Massen m_1 und m_2, die durch eine Feder mit Federkonstante k gekoppelt sind, lautet:

$$U = -m_1 g L \cos\theta_1 - m_2 g L \cos\theta_2 + \frac{1}{2} k l^2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2.$$

Entwickeln Sie dieses Potential für kleine Auslenkwinkel $\theta_1, \theta_2 \ll 1$ bis zur zweiten Ordnung, bestimmen Sie die stationären Punkte und diskutieren Sie deren Stabilität.



Tutoriumsaufgabe 12.2 *Punktladung nahe am Ursprung*

Das Potential einer Punktladung Q bei $\vec{x} = \vec{a}$ ist gegeben durch

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}.$$

Wie sieht dieses Potential in großem Abstand $|\vec{x}| \gg |\vec{a}|$ vom Ursprung aus?

Tutoriumsaufgabe 12.3 *Extrema im $\mathbb{R}^n$ (Teil I)*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$.

Aufgabe 12.4 *Extrema im $\mathbb{R}^n$ (Teil II)*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen. Entscheiden Sie, ob es sich um Maxima, Minima oder Sattelpunkte handelt. Wenn in der Hesse-Matrix Eigenwerte gleich Null sind, hilft es, sich das Verhalten der Funktion in einer Umgebung um den stationären Punkt anzusehen.

a) $f(x, y) = x^4 + \frac{1}{2}y^2 + \cos(x^2 + y^2)$

b) $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

Aufgabe 12.5 *Sattelpunktsentwicklung*

Ein häufig auftretendes Problem in der Physik ist die Berechnung von Integralen der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-Mf(x)} \qquad \text{für } M \to \infty, \tag{1}$$

wobei $f(x)$ eine glatte Funktion ist mit *genau einem globalen Minimum* bei x_0, d.h. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Weil der Integrand wegen $f(x) > f(x_0)$ für $x \neq x_0$ sehr klein wird und diese Teile des Integrals also kaum beitragen, kann man $f(x)$ um $x = x_0$ entwickeln,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots$$

und das Integral näherungsweise berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-Mf(x)} \approx \mathrm{e}^{-Mf(x_0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} M f''(x_0)(x - x_0)^2} = \mathrm{e}^{-Mf(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{M f''(x_0)}}. \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die Sattelpunktsnäherung für $f(x) = x^2 + 4x - 3$ exakt ist, d.h. dass in Gl. (2) Gleichheit gilt.

b) Berechnen Sie das Integral Gl. (1) für $f(x) = \ln(1 + x^2)$ mit der Sattelpunktsnäherung und vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis für $M = 1$. Falls $M > 1$ ist, kann man das Integral so approximieren:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-M \ln(1+x^2)} = \sqrt{\pi} \left(M^{-1/2} + \mathcal{O}(M^{-3/2}) \right).$$

Stimmen die beiden Entwicklungen in der führenden Ordnung überein?

Aufgabe 12.6 *Taylorreihe*

Entwickeln Sie die Funktion $f(x, y) = x^y$ um den Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ in eine Taylorreihe bis zu Termen dritter Ordnung. Verwenden Sie diese Entwicklung, um $1.05^{1.02}$ zu berechnen, und vergleichen Sie mit dem Ergebnis $1.05^{1.02} \approx 1.05102509351102$.
Hinweis: benutzen Sie die Identität $x^y = \mathrm{e}^{y \ln x}$.

Ergänzungsaufgabe 12.7 *Taylorreihen im* $\mathbb{R}^n$

Entwickeln Sie die Funktion

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{(x - a_x)^2 + (y - a_y)^2 + (z - a_z)^2}} \tag{3}$$

in $\vec{x} = (x, y, z)$ um den Ursprung ($(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis aus der Vorlesung (Einstein'sche Summenkonvention!):

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|} = \frac{1}{|\vec{a}|} + \frac{x_i a_i}{|\vec{a}|^3} + \frac{1}{2} x_i x_j \left(\frac{3 a_i a_j}{|\vec{a}|^5} - \frac{\delta_{ij}}{|\vec{a}|^3} \right). \tag{4}$$

Abgabe: Dienstag, 29.01.2008, bis 13:00 Uhr, Theresienstr. 37, Briefkästen vor Bibliothek (1. Stock).