$$\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = -\int d^3y \, \frac{\left[\vec{\nabla}\rho + \frac{1}{c^2}\partial_t \vec{j}\,\right]_{ret}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{B}_{ret}(\vec{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3y \, \frac{\left[\mathrm{rot}\, \vec{j}\,\right]_{ret}}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und rot auf $\vec{y}$ wirken und $[\;]_{ret}$ andeuten soll, daß das Argument der Funktionen in Klammern $(\vec{y}, t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|)$ lautet.

Beachte, daß $[\vec{\nabla}\rho]_{ret} \neq \vec{\nabla}[\rho]_{ret}$

$$\vec{\nabla}[\rho]_{ret} = \vec{\nabla}\rho\left(\vec{y}, t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|\right)$$

$$= [\vec{\nabla}\rho]_{ret} - [\partial_t \rho]_{ret} \underbrace{\vec{\nabla}\left(\frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}\right)}_{= -\frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}}$$

d.h. $[\vec{\nabla}\rho]_{ret} = \vec{\nabla}[\rho]_{ret} - \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}\frac{1}{c}[\partial_t\rho]_{ret}$

Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = \int \frac{d^3y}{|\vec{x}-\vec{y}|}\left\{ -\vec{\nabla}[\rho]_{ret} + \frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|}[\partial_t\rho]_{ret} - \frac{1}{c^2}[\partial_t \vec{j}\,]_{ret} \right\}$$

oder, nach einer partiellen Integration im 1. Term

$$\boxed{\vec{E}_{ret}(\vec{x},t) = \int d^3y \left\{ \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3}[\rho]_{ret} + \left(\frac{1}{c}\frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^2}[\partial_t\rho]_{ret} - \frac{1}{c^2}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}[\partial_t \vec{j}\,]_{ret} \right) \right\}}$$

RETARDIERTES COULOMBFELD

STRAHLUNGSTERME $\sim \frac{1}{r}$
(= 0 im statischen Fall)

Analog findet man unter Verwendung von

$$\vec{\nabla} \times [\vec{j}]_{ret} = [\vec{\nabla} \times \vec{j}]_{ret} + \frac{1}{c} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \times [\partial_t \vec{j}]_{ret}$$

für das retardierte magnetische Feld

$$\boxed{\vec{B}_{ret}(\vec{x},t) = -\frac{1}{c} \int d^3y \left\{ \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^3} \times [\vec{j}]_{ret} \quad \underline{\text{BIOT SAVART TERM}} \right. \\ \left. + \quad + \frac{1}{c} \frac{\vec{x}-\vec{y}}{|\vec{x}-\vec{y}|^2} \times [\partial_t \vec{j}]_{ret} \right\}}$$

<u>STRAHLUNG</u>STERM $\sim \frac{1}{r}$

Um uns eine heuristische Vorstellung von den verschiedenen Termen zu machen betrachten wir monochromatische Zeitabhängigkeiten $\sim e^{-i\omega t}$.
Dann erhält man für das Verhältnis der beiden Terme in $\vec{B}_{ret}$

$$\frac{\text{Strahlung}}{\text{Biot-Savart}} \sim \frac{\partial_t j}{rc} \Big/ \frac{j}{r^2} \sim \frac{\omega}{c} r \sim \frac{r}{\lambda}$$

wobei $r = |\vec{x}-\vec{y}|$ der Abstand zwischen Quelle und Aufpunkt ist.

Für große Wellenlängen λ (kleine Frequenzen ω) dominiert der Biot-Savart Anteil bis zu großen Abständen von der Quelle. <u>Erst für $r \gg \lambda$ dominiert der Strahlungsterm.</u>
Entsprechende Aussagen gelten auch für das elektrische Feld!

Wir führen folgende Terminologie ein:

Nahzone:	$r \ll \lambda$
Fernzone:	$r \gg \lambda$
(auch Wellenzone)	

Im folgenden diskutieren wir die Felder in der <u>Fernzone</u>. (Für Nahzone siehe 6.3.)

Sei <u>d</u> die <u>Ausdehnung der Quelle</u>. Wir betrachten

$$r \gg \lambda \quad \underline{\text{und}} \quad r \gg d$$

Dann gilt für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{ret} = \frac{1}{r}\int d^3y \left\{ \frac{1}{c}[\partial_t \rho]_{ret}\,\vec{n} - \frac{1}{c^2}[\partial_t \vec{j}]_{ret} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

wobei $\vec{n} = \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ und $r = |\vec{x}|$

Wir verwenden nun den Ladungserhaltungssatz

$$[\partial_t \rho]_{ret} = -[\vec{\nabla}\cdot\vec{j}]_{ret} \cong -\vec{\nabla}\cdot[\vec{j}]_{ret} + \frac{1}{c}\vec{n}\,[\partial_t \vec{j}]_{ret}$$

und vernachlässigen den Divergenzterm auf der rechten Seite, da er $\sim \frac{1}{r}$ ist.

$$\vec{E}_{ret} = \frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\int d^3y \left\{ (\vec{n}[\partial_t \vec{j}]_{ret})\cdot\vec{n} - [\partial_t \vec{j}] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Analog (noch einfacher) findet man

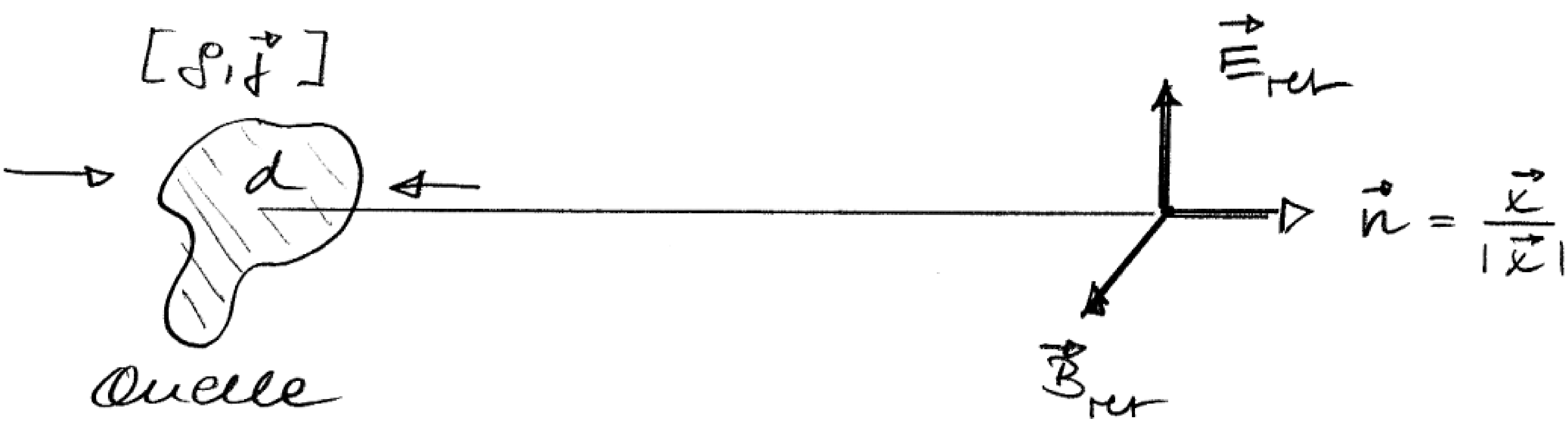
$$\vec{B}_{ret} = -\frac{1}{r}\frac{1}{c^2}\int d^3y\; \vec{n}\times[\partial_t \vec{j}\,]_{ret} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Wir definieren

$$\boxed{\vec{J} := \int d^3y\,[\vec{j}\,]_{ret} = \int d^3y\; \vec{j}\left(\vec{y}, t-\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}|\right)}$$

und haben damit als führende Terme

$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\begin{aligned}\vec{E}_{ret} &= \frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r}\,\vec{n}\times(\vec{n}\times\dot{\vec{J}}\,) \\ \vec{B}_{ret} &= -\frac{1}{c^2}\,\frac{1}{r}\,\vec{n}\times\dot{\vec{J}}\end{aligned}} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{B}_{ret}\times\vec{n} = \vec{E}_{ret}} \end{aligned}\right\}\quad (1)$$



Die retardierten Felder sind lokal ebene Wellen.

In hinreichend großen Abständen von der Quelle kann man auch t_{ret} in der Quelle $\vec{J}$ entwickeln*)

$$t_{ret} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{c} + O\left(\frac{d^2}{rc}\right)$$

wobei der Entwicklungsparameter $\frac{d}{r}$ ist. Damit man den Term d^2/rc vernachlässigen darf, sollten sich $\vec{J}$ in der Zeit d^2/rc nur wenig ändern; im zeitlich harmonischen Fall läuft das auf

$$\omega \cdot \frac{d^2}{rc} \sim \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \qquad (*)$$

Falls $\lambda \gg d$, dann ist diese Relation automatisch erfüllt, denn dann folgt aus $r \gg \lambda$, $\lambda \gg \frac{d^2}{\lambda^2}\lambda$ die Beziehung $r \gg (d/\lambda)^2 \lambda$

Ist hingegen $\lambda \lesssim d$ dann ist $(*)$ nicht im ganzen Frequenzgebiet erfüllt, sicher aber für hinreichend große Abstände.

Wir setzen im folgenden

$$\boxed{\vec{J} = \int d^3y\, \vec{J}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{c}\right)} \qquad (2)$$

---

*) $\frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{y}| = \frac{1}{c}|\vec{x}|\,\left|\vec{n} - \frac{\vec{y}}{r}\right| =$

$$\frac{r}{c}\sqrt{\left(\vec{n}-\frac{\vec{y}}{r}\right)^2} = \frac{r}{c} - \frac{r}{c}\frac{\vec{y}\cdot\vec{n}}{r} + O\left(\frac{d^2}{rc}\right)$$

Wir diskutieren nun die Konsequenzen aus den Gleichungen (1) und (2):

Dazu stellen wir $\vec{j}\,(\vec{x},t)$ als ~~Fourier~~-integral dar

$$\vec{j}\,(\vec{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t}\, \vec{j}\,(\vec{x},\omega)$$

Damit gibt dann

$$\vec{J}\,(\vec{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3y\, e^{-i\omega\left[t-\frac{r}{c}+\frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{c}\right]}\, \vec{j}\,(\vec{y},\omega)$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega\left[t-\frac{r}{c}\right]} \int d^3y\, e^{-i\vec{k}\vec{y}}\, \vec{j}\,(\vec{y},\omega)$$

wobei $\vec{k} := \frac{\omega}{c}\vec{n}$ Wellenvektor

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{x}}\, \vec{j}\,(\vec{k},\omega)$$

Also

$$\boxed{\vec{J}\,(\vec{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, \vec{j}\,(\vec{k},\omega)}$$

wobei $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ (!)

Im monochromatischen Fall gilt

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{j}(x)\, e^{-i\omega t}\right]$$

$$\vec{j}(\vec{x},t) = \mathrm{Re}\left[\vec{j}(\vec{k})\, e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\right]$$

wobei $\vec{j}(\vec{k}) = FT[\vec{j}(\vec{x})]$ ist.

Der zeitlich gemittelte Poynting vektor ist dann

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{B}^2 \rangle \vec{n}$$

$$\underset{(1)}{=} \frac{c}{4\pi}\left(\frac{1}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r^2} \underbrace{\langle |\vec{n}\times\vec{j}|^2 \rangle}_{\frac{1}{2}|\vec{n}\times\vec{j}(k)|^2} \omega^2 \, \vec{n}$$

$$\langle \sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{r^2}\, \frac{1}{8\pi c^3}\, |\vec{n}\times\vec{j}(\vec{k})|^2 \omega^2 \, \vec{n}$$

Bezeichnet man mit $dI = \frac{dI}{d\Omega} d\Omega$ die zeitlich gemittelte abgestrahlte Energie pro Zeiteinheit in das Raumwinkelelement $d\Omega$, so ist

$$\underline{\underline{\frac{dI}{d\Omega}}} = \langle \vec{S} \rangle\, r^2 \vec{n}\, d\Omega \,/\, d\Omega$$

$$= \underline{\underline{\frac{\omega^2}{8\pi c^3}\, |\vec{n}\times\vec{j}(\vec{k})|^2}}$$

mit $\underline{\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\vec{x}}\, \vec{j}(\vec{x})}$; $\underline{\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}}$

Multipolentwicklung / Langwellenentwicklung

Wir wollen nun zusätzlich annehmen, dass gilt

$$\boxed{\lambda \gg d} \quad (*)$$

Dann gilt, wie bereits gezeigt, $\frac{d^2}{r\lambda} \ll 1$

Wenn $(*)$ gilt, dann ist die relative zeitliche Änderung von $\vec{j}$ und ρ auch klein in der Zeit $\frac{d}{c}$, die das Licht benötigt, um die Quelle zu durchqueren; mit anderen Worten: die Retardierung innerhalb der Quelle ist ein kleiner Effekt.

Wir entwickeln daher $\vec{J}$

$$\vec{J} = \int d^3y \, \vec{j}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{c}\right)$$

$$\cong \int d^3y \left[\vec{j}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{\vec{n}\cdot\vec{y}}{c} \partial_t \vec{j}\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

1. Term

$$\int d^3y \, j_l\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right) = \int d^3y \, \overbrace{\frac{\partial y_l}{\partial y_m}}^{= \delta_{lm}} j_m\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\underset{\text{p.I.}}{=} - \int d^3y \, y_l \frac{\partial}{\partial y_m} j_m\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right)$$

$$\underset{\text{Kont. gl.}}{=} + \int d^3y \, y_l \, \partial_t \rho\left(\vec{y}, t - \frac{r}{c}\right) = \left[\partial_t \vec{P}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]_l$$

wobei $\vec{P}(t) = \int d^3y \, \vec{y} \, \rho(\vec{y}, t)$ Dipolmoment

2. Term

$$\frac{1}{c}\int d^3y\; n_e y_e\, \partial_t j_m(\vec{y}, t-\tfrac{r}{c}) =$$

$$= \frac{1}{2c} n_e \int d^3y\, (y_e \partial_t j_m + y_m \partial_t j_e)$$

$$+ \frac{1}{2c} n_e \int d^3y\, (y_e \partial_t j_m - y_m \partial_t j_e)$$

$$\equiv \frac{1}{2c} n_e (\ddot{I}_{em} + 2c\, \dot{\mu}_{em})$$

wobei

$$I_{em} = \int d^3y\, \rho(\vec{y})\, y_e y_m$$

$$\mu_{em} = \frac{1}{2c}\int (y_e j_m - y_m j_e)$$

Es gilt

$$\dot{I}_{em}(t) = \int d^3y\, \dot{\rho}(\vec{y}, t)\, y_e y_m =$$

$$= \int d^3y\, (-\operatorname{div}\vec{j})\, y_e y_m =$$

$$\underset{p.I.}{=} \int d^3y\, (j_e y_m + j_m y_e)$$

Insgesamt findet man also

$$\boxed{J_m = \dot{P}_m(t-\tfrac{r}{c}) + \dot{\mu}_{em}(t-\tfrac{r}{c})\, n_e + \frac{1}{2c}\ddot{I}_{em}(t-\tfrac{r}{c})\, n_e}$$

elektr. Dipol   magn. Dipol   elektr. Quadrupol