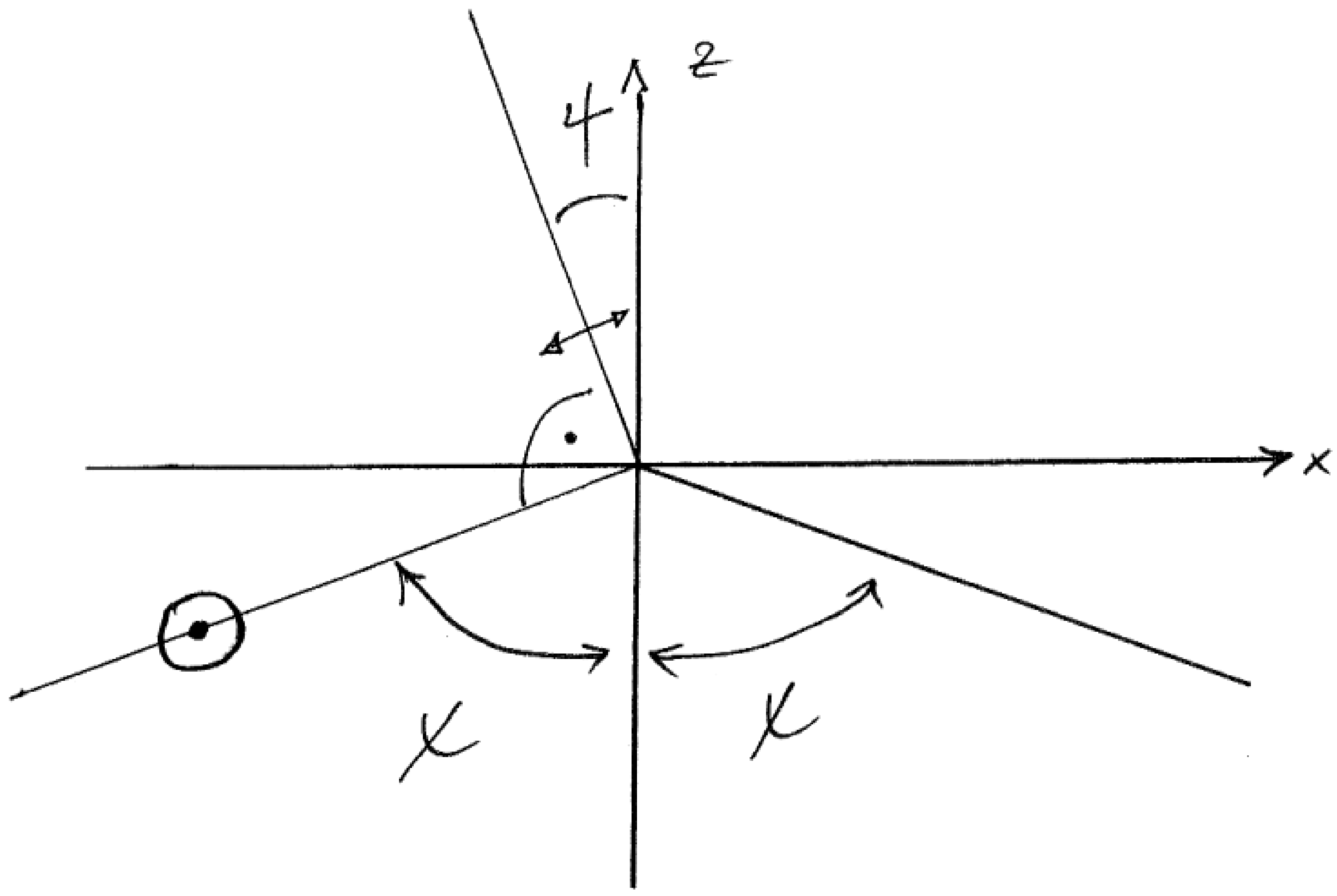


Aus dem Brechungsgesetz folgt mit
$\sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \chi\right) = \cos\chi$

$\curvearrowright \tan\chi_B = n_2 / n_1$.

Der Winkel, der diese Beziehung erfüllt heisst Polarisationswinkel oder Brewster Winkel χ_B. Die reflektierte Welle ist dann $\perp$ auf Einfallsebene polarisiert
→ Erzeugung lin. polarisierten Lichts.

(Anschaulich: Da reflektierter Strahl $\perp$ auf gebrochenen Strahl und Abstrahlung der schwingenden Dipole transversal zu seiner Schwingungsrichtung erfolgt keine Energieabgabe für in der Einfallsebene erfolgte Anregung.)

tige isotrope Körper.
1 aufeinander senkrecht (s.
$\sin\psi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$:

ßt *Polarisationswinkel* oder
on DAVID BREWSTER (1781

rt, so wird die parallel zur
ischen Vektors ausgelöscht.
„in der Einfallsebene", wie
rten Lichts bezeichnet man
gels, durch den die lineare
Definition ist also nicht der
„Polarisation" bestimmend;
r zweifellos der physikalisch
n am besten den Begriff der
ichtung und ersetzt ihn
r Schwingungsrichtung (des
Vektors).
te nicht mehr zweifelhafte
der Geschichte der Optik
Gegenstand von Meinungs-
iten gewesen. Zur Zeit der
icht orie war in der Tat
ht in dem Sinne entscheid-
e, wo wir uns auf die be-
ungen des elektrischen und
Feldes berufen können. So
zu dem Ergebnis, daß die
hwingungen des Äthers senk-
Polarisationsebene erfolgen,
NZ NEUMANN sie als parallel
m. Sie machten nämlich
der Ätherbewegung; bei
edenen Medien verschieden,
mgekehrt. In Wahrheit ist
Einleitung erläutert wurde,
ngungen verletzen, um das
zu vermeiden.
ück, so können wir uns den
machen, indem wir uns vor-
Welle im zweiten Medium
, deren Richtung durch den
st. Diese Elektronenschwin-
die erste Medium zurück-
ear schwingendes Elektron
det keine Energieabgabe in
d der reflektierte Strahl auf
ür die Schwingung parallel
Strahl erhält keine Energie

A = einfallende Amplitude = E_e
R = reflekt. —"— = E_r

Die Fig. 10 stellt für Glas den Verlauf der Intensität des reflektierten Lichts als Funktion des Einfallswinkels φ dar[1]. Dieser ist am unteren Rande der Figur in einer Gradskala aufgetragen; am oberen Rande stehen die entsprechenden Werte des Brechungswinkels. Die Kurve *I* stellt r_s, die Kurve *II* $\frac{1}{2}(r_s + r_p)$, die Kurve *III* r_p dar; man bemerkt die Stelle der Kurve *III*, die dem Polarisationswinkel 56° 40′ entspricht, ein Winkel, dessen Tangens gerade $n = 1{,}52$ beträgt.

Die Kurve *II* zeigt die Intensität des reflektierten Lichts für den Fall, daß das einfallende Licht linear unter 45° gegen die p- oder s-Richtung polarisiert ist. Betrachten wir nämlich allgemein linear polarisiertes Licht von der Amplitude A, bei dem die Schwingungsrichtung von $\mathfrak{E}^a$ den Winkel α gegen die p-Richtung bildet, so ist

(10) $$A_p = A\cos\alpha\,, \qquad A_s = A\sin\alpha\,.$$

Ist A die Lichtstärke des einfallenden Bündels, so hat man

(11) $$\mathsf{A}_p = \mathsf{A}\cos^2\alpha\,, \quad \mathsf{A}_s = \mathsf{A}\sin^2\alpha\,.$$

Die gesamte reflektierte Intensität läßt sich also schreiben:

$$\mathsf{R}_\alpha = \mathsf{R}_p + \mathsf{R}_s = \left(\frac{\mathsf{R}_p}{\mathsf{A}_p}\cos^2\alpha + \frac{\mathsf{R}_s}{\mathsf{A}_s}\sin^2\alpha\right)\mathsf{A}\,,$$

und hieraus folgt $\boxed{R_\alpha = R_\perp \sin^2\alpha + R_\parallel \cos^2\alpha}$

(12) $$r_\alpha = \frac{\mathsf{R}_\alpha}{\mathsf{A}} = r_p\cos^2\alpha + r_s\sin^2\alpha\,;$$

Entsprechendes gilt für das gebrochene Licht. Für $\alpha = \pi/4$ hat man wegen $\cos^2\frac{\pi}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ gerade die durch Kurve *II* dargestellte Funktion

(13) $$r_{\frac{\pi}{4}} = \tfrac{1}{2}(r_p + r_s)\,.$$

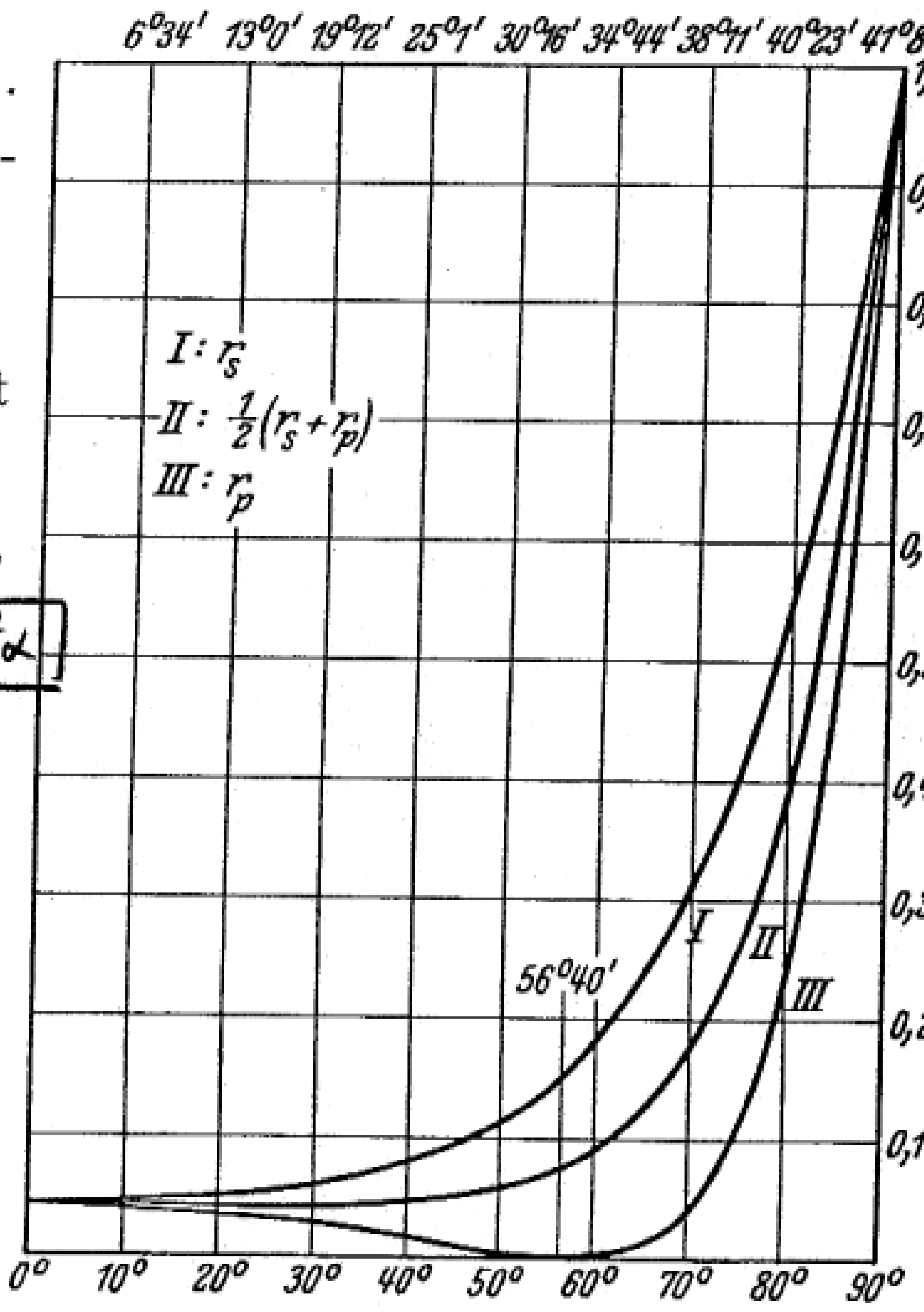


Fig. 10. Intensität des reflektierten Lichts als Funktion des Einfallswinkels. (Nach CHWOLSON: Lehrb. d. Physik, 2. Aufl. 1922.)

Dieselbe Kurve ~~stellt auch~~ das Verhalten von natürlichem Licht bei Reflexion dar. Man kann nämlich natürliches Licht auffassen als polarisiertes Licht mit unregelmäßig schwankendem Polarisationszustande. Man erhält also die Intensität durch Mittelung über den Winkel α. Da die Mittelwerte von $\cos^2\alpha$ und $\sin^2\alpha$ gleich $\frac{1}{2}$ sind, so wird für natürliches Licht

(14) $$\overline{\mathsf{A}}_p = \overline{\mathsf{A}}_s = \tfrac{1}{2}\mathsf{A}\,,$$

aber:

(15) $$\left\{\begin{aligned} \overline{\mathsf{R}}_p &= \frac{1}{2}\frac{\overline{\mathsf{R}}_p}{\overline{\mathsf{A}}_p}\mathsf{A} = \frac{1}{2}\,r_p\mathsf{A}\,,\\ \overline{\mathsf{R}}_s &= \frac{1}{2}\frac{\overline{\mathsf{R}}_s}{\overline{\mathsf{A}}_s}\mathsf{A} = \frac{1}{2}\,r_s\mathsf{A}\,.\end{aligned}\right.$$

[1] Aus O. D. CHWOLSON: Lehrbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. II 2 S. 716. Braunschweig 1922.

$\begin{pmatrix} s = \perp \\ p = \parallel \end{pmatrix}$, $r_s \rightarrow R_\perp$, $r_p \rightarrow R_\parallel$

aus M. BORN, OPTIK, SPRINGER VERLAG

Ist das einfallende Licht linear polarisiert, so gilt dasselbe für das reflektierte und gebrochene Licht, da die Phasen sich nur um 0 oder π ändern. Wohl aber wird die Schwingungsrichtung im reflektierten und gebrochenen Strahl gegen die im einfallenden gedreht. Man bezeichnet den Winkel zwischen Schwingungs- und Einfallsebene als das Azimut der Schwingung und zählt dies positiv bei Rechtsdrehung um die Fortpflanzungsrichtung

α Azimut der einfallenden Welle
ρ — " — refl. — " —
δ — " — gebrochenen — " —

$$\tan\alpha = \frac{E_\perp}{E_\parallel}$$

wobei $E_\perp$ und $E_\parallel$ die Komponenten des E-Feldes im einfallenden Strahl $\perp$ und $\parallel$ zur Einfallsebene bezeichnen.

$$\tan\rho = \frac{r_\perp E_\perp}{r_\parallel E_\parallel}, \quad \tan\delta = \frac{t_\perp E_\perp}{t_\parallel E_\parallel}$$

Aus den Fresnelschen Formeln ergibt sich

$$\tan\rho = -\frac{\cos(\chi-\psi)}{\cos(\chi+\psi)} \cdot \tan\alpha$$

$$\tan\delta = \cos(\chi-\psi) \cdot \tan\alpha$$

Wegen $0 \le \chi \le \frac{\pi}{2}$ und $0 \le \psi \le \pi/2$ folgt

$$|\tan\rho| \ge |\tan\alpha|, \quad |\tan\delta| \le |\tan\alpha|$$

(= nur für senkrechte und streifende Inzidenz)

Die Ebene der Lichtschwingung wird also durch Reflexion von der Einfallsebene weg, durch Brechung zu ihr hingedreht

Fig aus BORN

$n = 1{,}52$

$\alpha = 45°$

Im reflektierten Licht sind also die beiden Komponenten nicht mehr gleich, man sagt dann, das reflektierte Licht sei *partiell* polarisiert, und nennt

$$\frac{\overline{\mathsf{R}}_p - \overline{\mathsf{R}}_s}{\mathsf{A}} = \frac{1}{2}(r_p - r_s) \tag{16}$$

den *polarisierten Anteil*. Das Reflexionsvermögen des gesamten aus natürlichem durch Reflexion entstehenden Lichts ist gegeben durch

$$\bar{r} = \frac{\overline{\mathsf{R}}}{\mathsf{A}} = \frac{\overline{\mathsf{R}}_p + \overline{\mathsf{R}}_s}{\mathsf{A}} = \frac{1}{2}(r_p + r_s)\,, \tag{17}$$

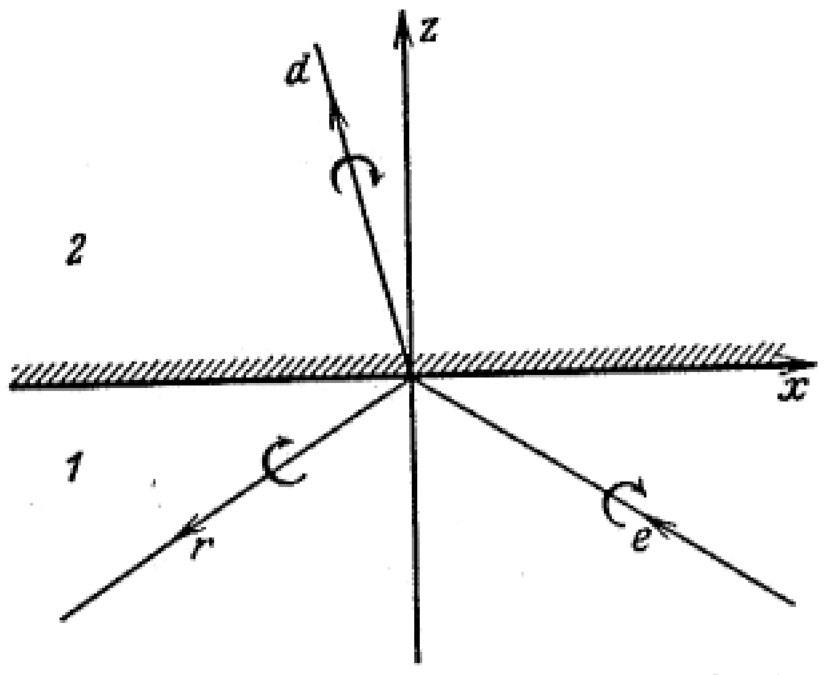


Fig. 11. Zur Vorzeichenbestimmung des Azimuts der Polarisation.

also wieder durch die Kurve *II*.

Entsprechende Betrachtungen gelten für den gebrochenen Strahl. Insbesondere hat man bei natürlichem Licht

$$\bar{r} + \bar{d} = 1\,. \tag{18}$$

Wir kehren nun wieder zu linear polarisiertem Licht zurück. Ist das einfallende Licht linear polarisiert, so gilt dasselbe für das reflektierte und gebrochene, da die Phasen sich nur um 0 oder π ändern. Wohl aber wird die Schwingungsrichtung (oder die „Polarisationsebene") im reflektierten und gebrochenen Strahl gegen die im einfallenden gedreht sein. Man bezeichnet den Winkel zwischen Schwingungs- und Einfallsebene als das *Azimut* der Schwingung und zählt dieses positiv bei Rechtsdrehung um die Fortpflanzungsrichtung (Fig. 11).

Es sei α das Azimut der einfallenden, ϱ das der reflektierten, δ das der gebrochenen Welle; man kann diese Winkel auf den Bereich $-\pi/2$ bis $\pi/2$ beschränken. Es ist

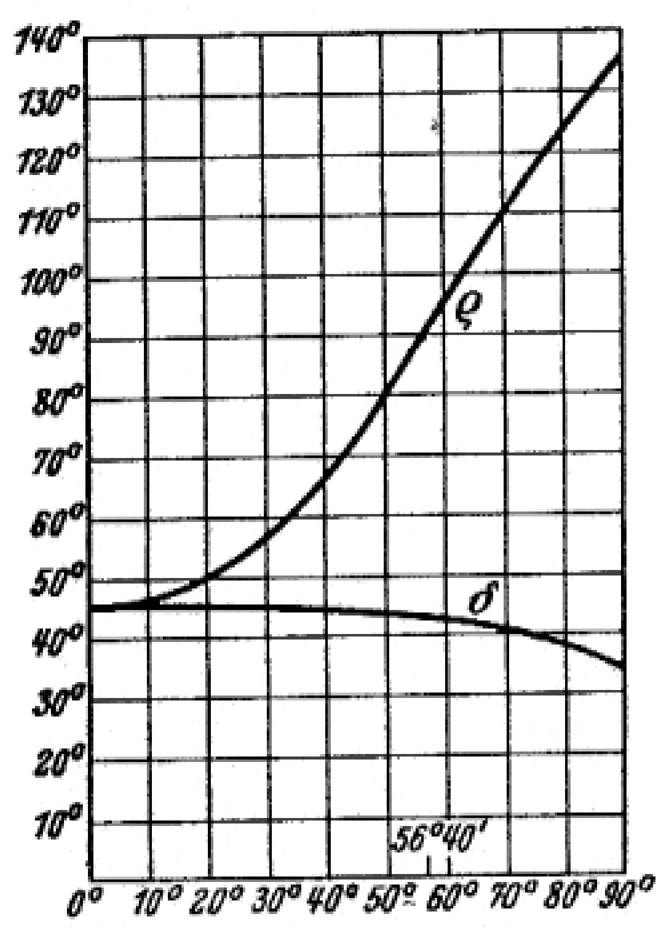


Fig. 12. Azimut der reflektierten und der gebrochenen Welle als Funktion des Einfallswinkels. (Nach CHWOLSON: Lehrb. d. Physik, 2. Aufl. 1922.)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{A_s}{A_p}\,, \qquad \operatorname{tg}\varrho = \frac{R_s}{R_p}\,, \qquad \operatorname{tg}\delta = \frac{D_s}{D_p}\,. \tag{19}$$

Aus den FRESNELschen Formeln § 10 (14), (15) ergibt sich:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg}\varrho &= -\frac{\cos(\varphi-\psi)}{\cos(\varphi+\psi)}\cdot\operatorname{tg}\alpha\,,\\ \operatorname{tg}\delta &= \cos(\varphi-\psi)\cdot\operatorname{tg}\alpha\,. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Wegen $0 \leqq \varphi \leqq \pi/2$, $0 \leqq \psi \leqq \pi/2$ folgt

$$|\operatorname{tg}\varrho| \geqq |\operatorname{tg}\alpha|\,,$$
$$|\operatorname{tg}\delta| \leqq |\operatorname{tg}\alpha|\,,$$

wo das Gleichheitszeichen in der oberen Ungleichung nur für senkrechte und streifende Inzidenz ($\varphi = \psi = 0$ bzw. $\varphi = \pi/2$) gilt, in der unteren Ungleichung nur für senkrechte Inzidenz. Die Ebene der Lichtschwingung wird also durch Reflexion von der Einfallsebene weg, durch Brechung zu ihr hingedreht. Den Verlauf[1] von ϱ und δ zeigt die Fig. 12 für $n = 1{,}52$ und $\alpha = 45°$.

Man sieht, daß für den Polarisationswinkel $\varphi = 56°\,40'$ gerade $\varrho = 90°$ wird; in der Tat wird für $\varphi + \psi = \pi/2$ nach (20) $\operatorname{tg}\varrho = \infty$, also $\varrho = \pi/2$ unabhängig von α.

[1] Nach O. D. CHWOLSON: Lehrbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. II 2 S. 716.

Aus M. BORN, OPTIK, SPRINGER VERLAG

Totalreflexion

Falls $\frac{n_2}{n_1} < 1$, man also vom optisch dichteren in das optisch dünnere Medium übergeht, tritt ab einem Grenzwinkel

$$\sin \chi_G = \frac{n_2}{n_1} \qquad (*)$$

Totalreflexion auf. Dann gilt $\chi' = 90°$, das Licht tritt also „streifend" aus. Für $\chi > \chi_G$ tritt überhaupt kein Licht mehr aus, sondern es wird ungeschwächt in das erste Medium zurückgeworfen. Trotzdem verschwindet keineswegs das elm. Feld im zweiten Medium, nur strömt keine Energie in dieses über.

Wiederhole die Rechnung für $\chi > \chi_G$

Es gilt die Dispersionsrelation

$$n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = p^2 + k^2$$

$$\curvearrowright k^2 = n^2\frac{\omega^2}{c^2} - p^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 (1 - \sin^2 \chi)$$

Winkel im jeweiligen Medium

Folglich

$$k_2^2 = \underbrace{\left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2}_{\overset{(*)}{=}\left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi_G} - \underbrace{\left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi'}_{\left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi}$$

$$= -n_1^2 \underbrace{(\sin \chi - \sin \chi_G)}_{>0} \underbrace{(\sin\chi + \sin \chi_G)}_{>0} < 0$$

$$\Rightarrow \boxed{k_2 = (\pm)\, i k_0 \qquad k_0 = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2 \chi - \sin^2 \chi_G}}$$

keine physikalisch sinnvolle Lösung falls Medium 2 ∞ ausgedehnt!

[illegible]

Hieraus ergibt sich dann der Reflexionskoeff.

$$r_\perp = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1 - k_2/k_1}{1 + k_2/k_1}$$

$$= \frac{\frac{\omega}{c} n_1 \cos\chi - i \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2\chi - \sin^2\chi_G}}{-\text{''}- \quad + \quad -\text{''}-}$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \cos\chi$$

$$= \frac{\cos\chi - i \sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\chi + i \sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\frac{n_2}{n_1} k_1 - \frac{n_1}{n_2} k_2}{\frac{n_2}{n_1} k_1 + \frac{n_1}{n_2} k_2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos\chi - i \sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos\chi + i \sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

$$\Downarrow \quad |r_{\parallel}| = |r_\perp| = 1$$

Die reflektierte Welle hat somit ein E-Feld der Stärke und Phase

$$E_r = r\, E_e$$

so daß man zusammen mit dem Phasenfaktor für die reflektierte Welle den Ausdruck

$$r E_e \exp\left[i \vec{k}\cdot\vec{x} - i\omega t\right]$$
$$= r\, E_e \exp\left[i p x - i\omega t\right] e^{-k_0 z}$$

erhält, also eine exponentiell in z-Richtung abfallende Welle. Die Größenordnung der Eindringens in das optisch dünnere Medium ist durch $\frac{c}{\omega n_1}$ gegeben. Wegen der örtlich veränderlichen Amplitude nennt man solche Wellen „inhomogene Wellen". Sie sind nicht transversal zur Ausbreitungsrichtung $\vec{p}$, da die x-Komponente des elektrischen Feldes nicht verschwindet (wenn $\vec{E}_e \parallel$ Einfallsebene).

Weiter ist ~~zu~~ beachten, daß r und t komplexe Größen sind und folglich Phasensprünge auftreten. Wir berechnen diese für die einfallende und reflektierte Welle.

$$e^{-i\delta} = r = \frac{z}{z^*} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{+i\alpha}} \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = 2\alpha$$

$$\tan\frac{\delta}{2} = \tan\alpha = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos\chi} & \parallel \\[2ex] \dfrac{\sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos\chi} & \perp \end{cases}$$

Die beiden Komponenten erfahren also unterschiedliche Phasensprünge. Daher wird linear polarisiertes Licht durch Totalreflexion in polarisiertes Licht verwandelt.

$$\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp$$

$$\tan\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\chi \sqrt{\sin^2\chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2\chi}$$

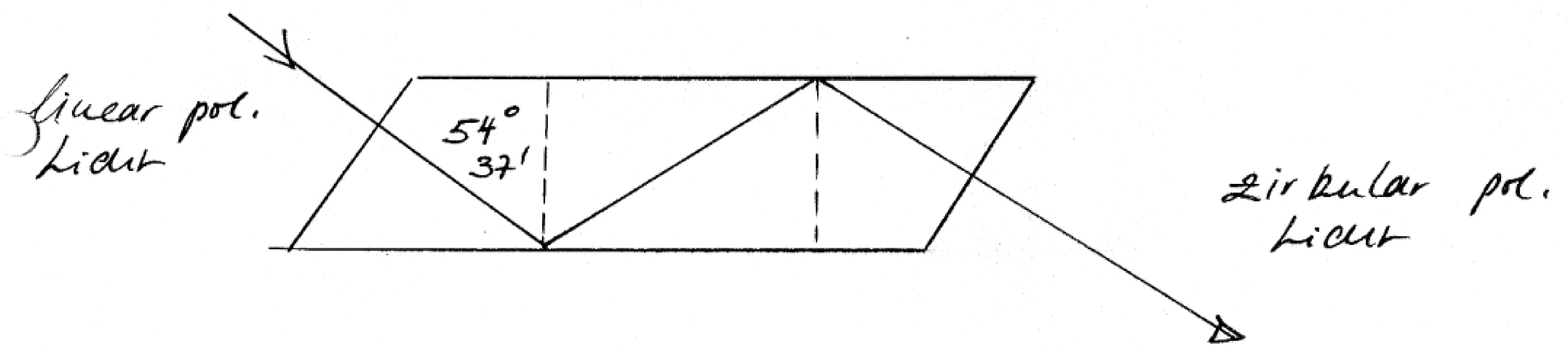
Dieser Ausdruck verschwindet für streifenden Einfall ($\chi = \pi/2$) und für den Grenzwinkel der Totalreflexion χ_G, $\sin \chi_G = \frac{n_2}{n_1}$. Zwischen diesen Winkeln liegt ein Maximum der relativen Phasendifferenz bei

$$\sin^2 \varphi_{max} = \frac{2(n_2/n_1)^2}{1+(n_2/n_1)^2}$$

Hierzu gehört $\tan(\delta_{max}/2) = \dfrac{1-\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ (*)

Es lassen sich also umso größere Phasendifferenzen erreichen, je kleiner $\frac{n_2}{n_1}$ ist.

Umwandlung von linear pol. Licht in zirkular pol. Licht $\rightarrow$ Fresnel Parallelepiped.



Wähle das Azimut des einfallenden Strahls zu $\alpha = 45°$. Dann gilt $|E_e^{\parallel}| = |E_e^{\perp}|$ und folglich wegen $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1$ auch $|E_r^{\parallel}| = |E_r^{\perp}|$.

Dann wählt man $\frac{n_2}{n_1}$ und den Einfallswinkel χ so, daß die Phasendifferenz δ gleich $90°$ wird.

Um dies mit einer einzelnen Reflexion zu erreichen, müßte nach (*)

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1 < \frac{1-n^2}{2n} \qquad (n \equiv n_2/n_1)$$

also $n_2/n_1 < \sqrt{2}-1 = 0{,}414$ sein.
n_1/n_2 müßte also 2,41 betragen, ein Wert, der alleine von Diamant erreicht wird.

Daher benutzte Fresnel zwei Totalreflex. an Glas; für $n_1/n_2 = 1{,}51$ wird der Einfallswinkel der maximalen Phasendifferenz $\delta_m = 45°56'$ bei $\chi = 51°20'$ erreicht. Man kann also gerade noch $\delta_m = 45°$ erreichen und zwar für die Winkel

$$\chi = 48°37' \quad \text{und} \quad \chi = 54°37'$$

Durch zweimalige Totalreflexion unter einem dieser Winkel erhält man dann eine Phasendifferenz von 90°.

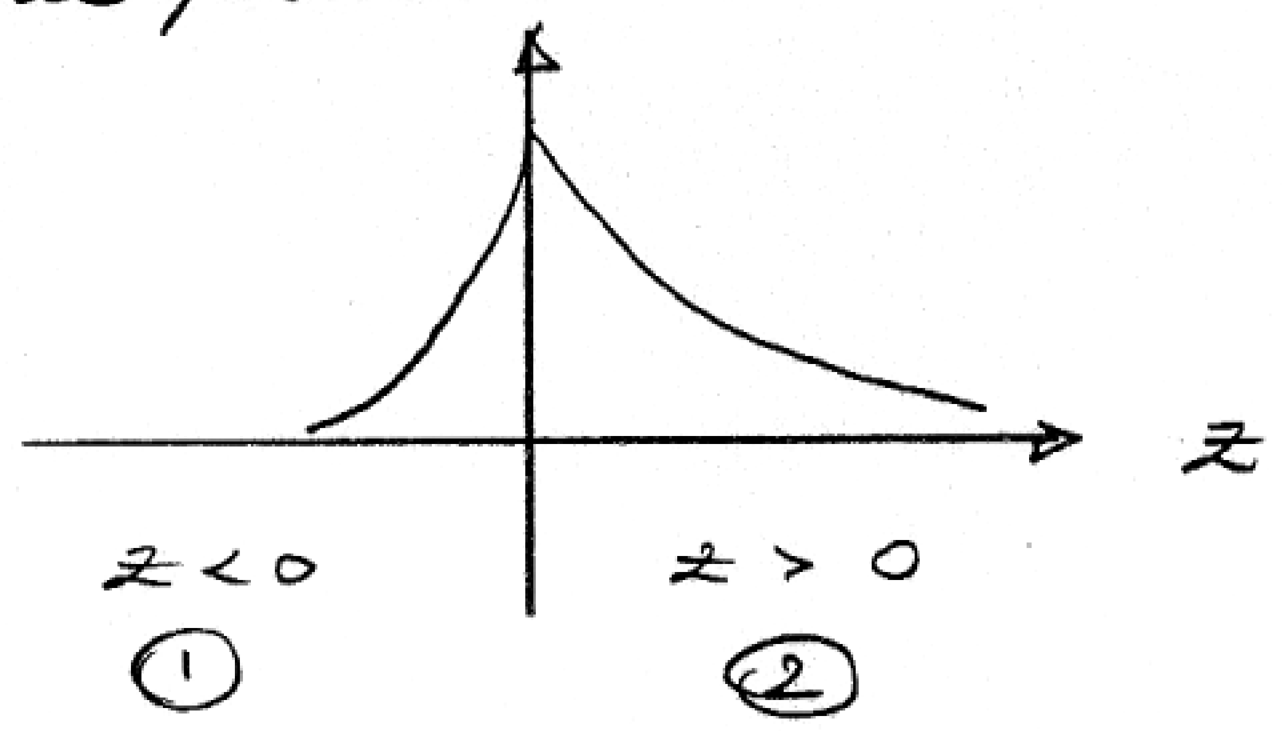
Man kann natürlich damit auch elliptisch polarisiertes Licht herstellen oder den Vorgang umkehren und aus elliptisch pol. Licht linear pol. Licht erzeugen.

5.5. Oberflächenwellen
(Evaneszente Wellen)

Wir suchen nach Lösungen der Maxwelltheorie, die auf beiden Seiten der Grenzfläche exponentiell abklingen, also von der Form sind

$$F_\alpha^{\omega\vec{p}} \; e^{i(\vec{p}\cdot\vec{x}-\omega t)} \; e^{\pm K_{1,2}\cdot z} \qquad \begin{pmatrix} + \text{ für } z<0 \\ - \text{ für } z>0 \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{Re}\, K_{1,2} > 0$, so daß die Wellen für $z \to \pm\infty$ abfallen.



Wir legen OBdA $\vec{p}$ wieder in x-Richtung ($\vec{p} = (p,0,0)$), und betrachten Medium 1 und 2 gemeinsam indem wir definieren

$$\vec{k} = (\vec{p}, -iK)$$

$$K = K_1 \quad \text{für } z<0 \qquad (\text{Gebiet } 1)$$
$$K = -K_2 \quad \text{für } z>0 \qquad (\text{Gebiet } 2)$$

Damit gilt

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \begin{cases} e^{ipx + K_1 z} & ; \; z<0 \\ e^{ipx - K_2 z} & ; \; z>0 \end{cases}$$

für den Phasenfaktor.

Als nächstes verwenden wir nun die Maxwellgleichungen (+ Randbedingungen) um die Dispersionsrelation zu finden. Wir beschränken uns auf den Fall $\mu = 1$, aber zunächst allgemeinen DK's $\varepsilon_{1,2}(\omega)$.

(i) Aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ folgt $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$,
also $p B_x - ik B_z = 0$

$$B_z = \frac{p}{ik} B_x$$

(ii) Aus der Randbedingung daß sowohl die Normal- wie die Tangentialkomponenten des B-Feldes stetig sein müssen ($\mu = 1$) folgt

$$B_x^{(1)} = B_x^{(2)} \equiv b$$

$$B_z^{(1)} = \frac{p}{ik_1} b = B_z^{(2)} = \frac{p}{-ik_2} b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\neq 0} \cdot b = 0 \quad \curvearrowright \quad b = 0$$

$$B_y^{(1)} = B_y^{(2)}$$

$$\curvearrowright \quad \boxed{\vec{B}^{(1)} = \vec{B}^{(2)} = (0, B, 0)} \qquad (1)$$

ist unverändert beim Durchgang durch die Grenzfläche, liegt in der Grenzfläche und ist transversal zur Ausbreitungsrichtung der Oberflächenwelle, $\vec{p}$.

(iii) Aus dem Durchflutungsgesetz folgt ($\vec{j}_{frei} = 0$)

$$-i \frac{\omega}{c} \vec{D} = i \vec{k} \times \vec{B}$$

Mit $\vec{D} = \varepsilon(\omega) \vec{E}$ und

$$\vec{k} \times \vec{B} = B \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} p & 0 & -ik \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \end{array} = B\,(ik, 0, p)$$

folgt dann

$$\boxed{\varepsilon(\omega) \vec{E} = -\frac{cB}{\omega} (ik, 0, p)}$$

oder für Medium 1 und 2 getrennt

$$\boxed{\varepsilon_{1,2}(\omega)\,\vec{E} = -\frac{cB}{\omega}\left(\pm i\kappa_{1,2},\, 0,\, p\right)} \qquad (2)$$

Daraus lesen wir ab, daß das elektrische Feld nicht mehr transversal ist, da es sowohl eine Komponente $\perp \vec{p}$ als auch eine Komponente $\parallel \vec{p}$ besitzt. Die transversale und longitudinale Komponente des evaneszenten elektrischen Feldes sind gegeneinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben (Faktor i).

(iv) $\operatorname{div} \vec{D} = 0$ führt auf $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$. Da $(p, 0, -i\kappa)\cdot(i\kappa, 0, p) = 0$ ist diese Bedingung bereits erfüllt.

(v) Faraday Induktionsgesetz: $\frac{i\omega}{c}\vec{B} = i\,\vec{k}\times\vec{E}$

$$\vec{k}\times\vec{E} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & 0 & -i\kappa \\ i\kappa & 0 & p \end{vmatrix} \frac{cB}{\varepsilon\omega} =$$

$$= -\frac{cB}{\varepsilon\omega}\left(0, -p^2+\kappa^2, 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c}\cdot B = \frac{cB}{\varepsilon\cdot\omega}\left(p^2-\kappa^2\right)$$

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left(p^2-\kappa^2\right)} \qquad (I)$$

jeweils getrennt für Medium 1 und 2

$$\boxed{\varepsilon_{1,2}(\omega) = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2\left(p^2-\kappa_{1,2}^2\right)} \qquad (I_{1,2})$$

(vi) Schließlich verwenden wir noch die Stetigkeitsforderungen an $\vec{D}$ und $\vec{E}$

D_{normal} stetig $\Rightarrow D_z^{(1)} = D_z^{(2)}$

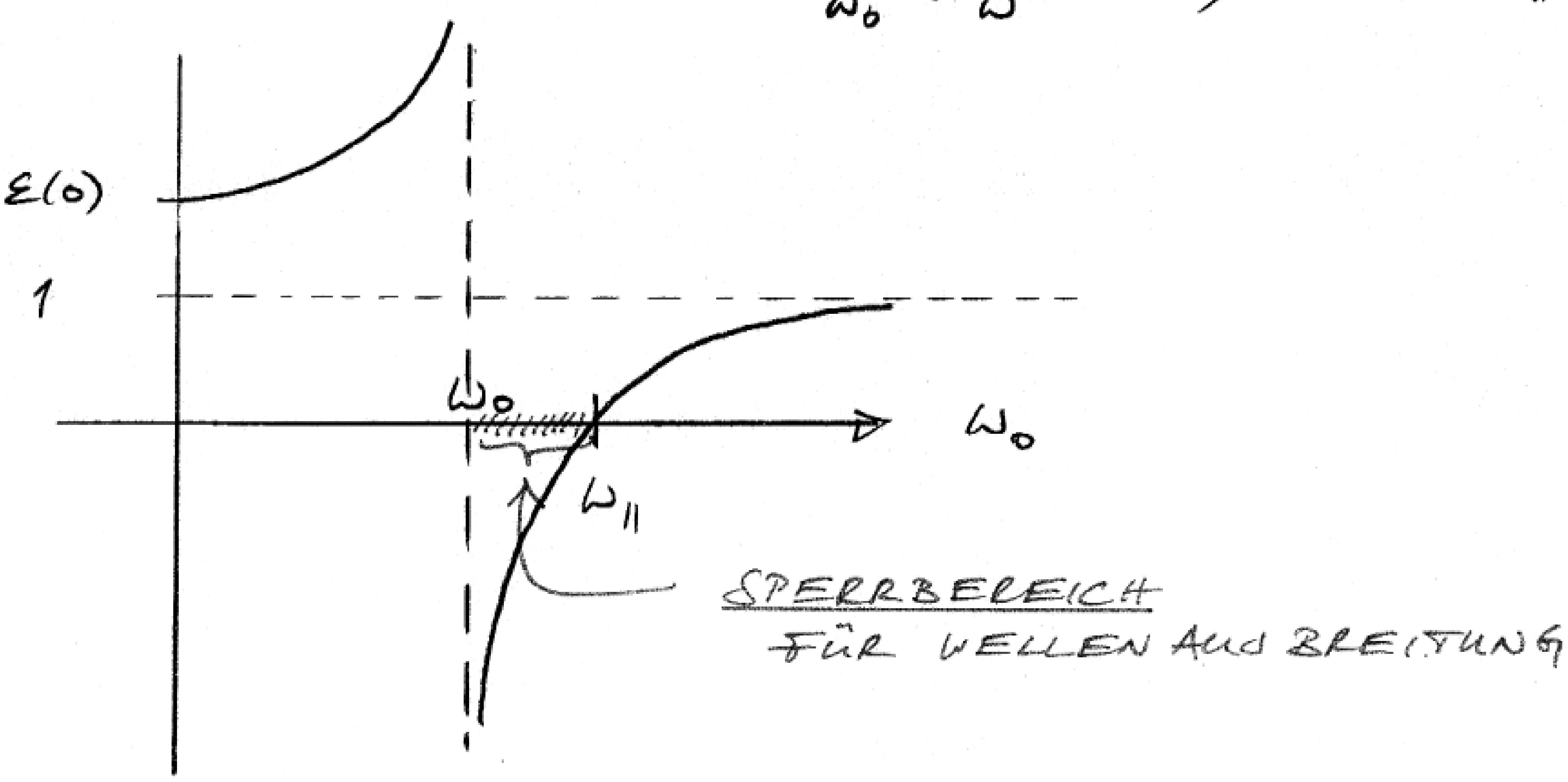
ist bereits erfüllt wegen der Stetigkeit des Magnetfeldes; vergleiche Gleichung (2)

$E_{tangential}$ stetig $\Rightarrow E_x^{(1)} = E_x^{(2)}$

$$\overset{\wedge}{\underset{(2)}{}} \quad \boxed{\frac{\varepsilon_1}{\kappa_1} = -\frac{\varepsilon_2}{\kappa_2}} \qquad (\mathrm{II})$$

Die folgende Diskussion spezialisieren wir nun auf einfache Dielektrika (ohne Dämpfung) an der Grenzfläche ~~zum~~ Vakuum.
Dann

$$\varepsilon_1 = 1 \quad , \quad \kappa_1 = \kappa > 0$$
$$\varepsilon_2(\omega) = \varepsilon(\omega) = \frac{\omega_{\parallel}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad , \quad \text{mit } \omega_{\parallel}^2 = \omega_p^2 + \omega_0^2$$



Im Bereich zwischen ω_0 und $\omega_\parallel$ ist $\varepsilon < 0$ und damit der Brechungsindex n im Medium 2 rein imaginär, so daß dort keine Wellenausbreitung möglich ist ($\rightarrow$ Sperrbereich)

Wir studieren nun die Existenz und Art der Oberflächenwellen für einfache Dielektrika.
Aus (II) folgt

$$\boxed{\kappa_2 = -\varepsilon(\omega)\,\kappa}$$

Demnach ist $\kappa_2 > 0$ falls $\varepsilon(\omega) < 0$, d.h. Oberflächenwellen sind genau dann eine mögliche Lösung der Maxwelltheorie, wenn Wellenausbreitung im Dielektrikum nicht möglich ist, also für

$$\boxed{\omega_0 < \omega < \omega_{\parallel}}$$

Die Gleichungen $(I_{1,2})$ lauten

$$(I_1)\quad 1 = \left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2$$

$$(I_2)\quad \varepsilon = \left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 - \varepsilon^2\left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2$$

oder aufgelöst nach p und κ

$$\left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_{\parallel}^2-\omega^2}{\omega_c^2-\omega^2} \qquad (\alpha)$$

$$\left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2 = -\frac{1}{\varepsilon+1} = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{\omega_{\parallel}^2-\omega_0^2} \qquad (\beta)$$

wobei $\omega_c = \frac{1}{2}(\omega_0^2+\omega_{\parallel}^2) = \omega_0^2 + \frac{1}{2}\omega_p^2$

Oberflächenwellen sind folglich nur dann Lösungen, wenn

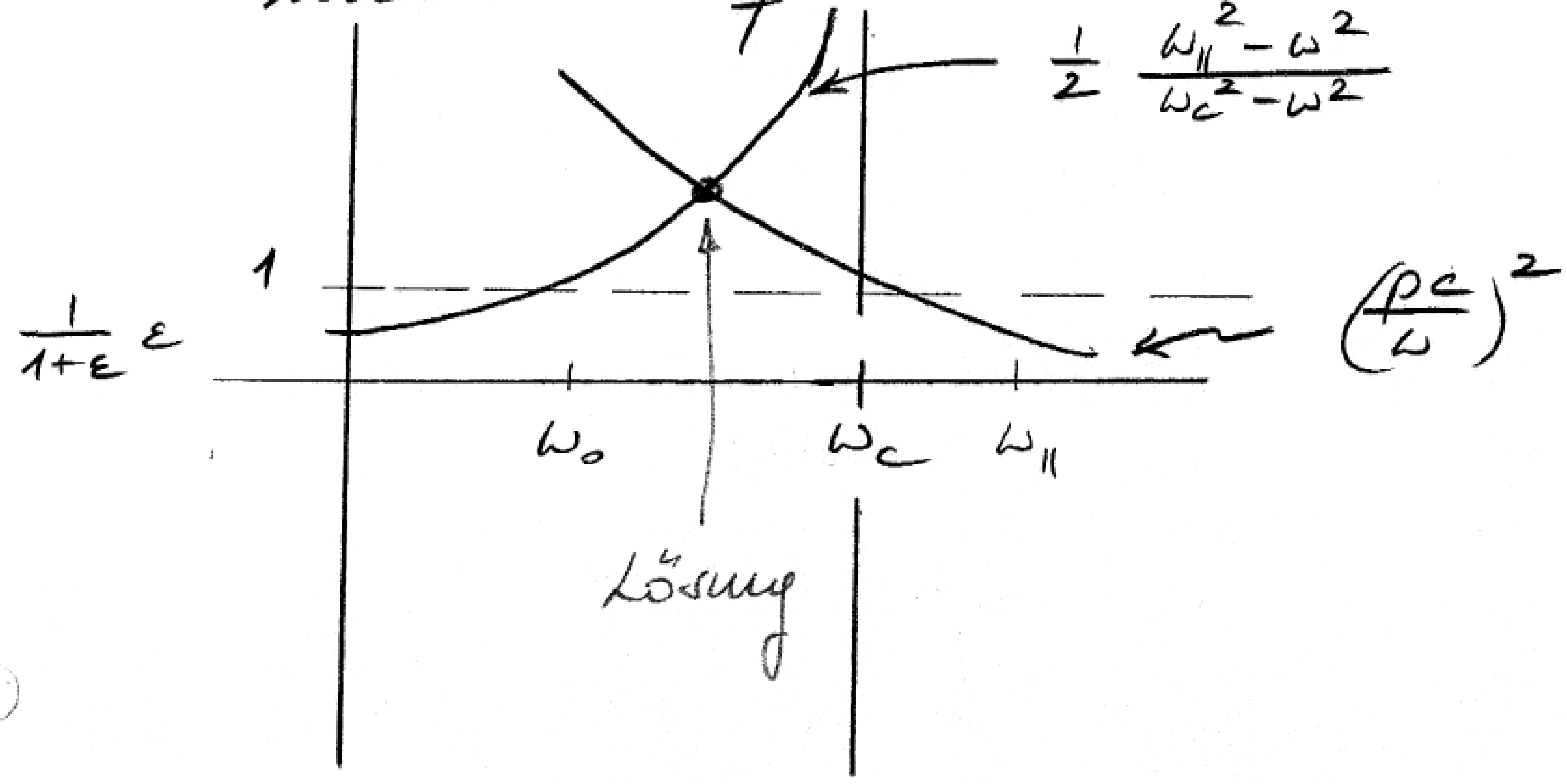
$$\boxed{\omega_0 < \omega < \omega_c}$$

Es gilt $p \to \infty$ für $\omega \to \omega_c$

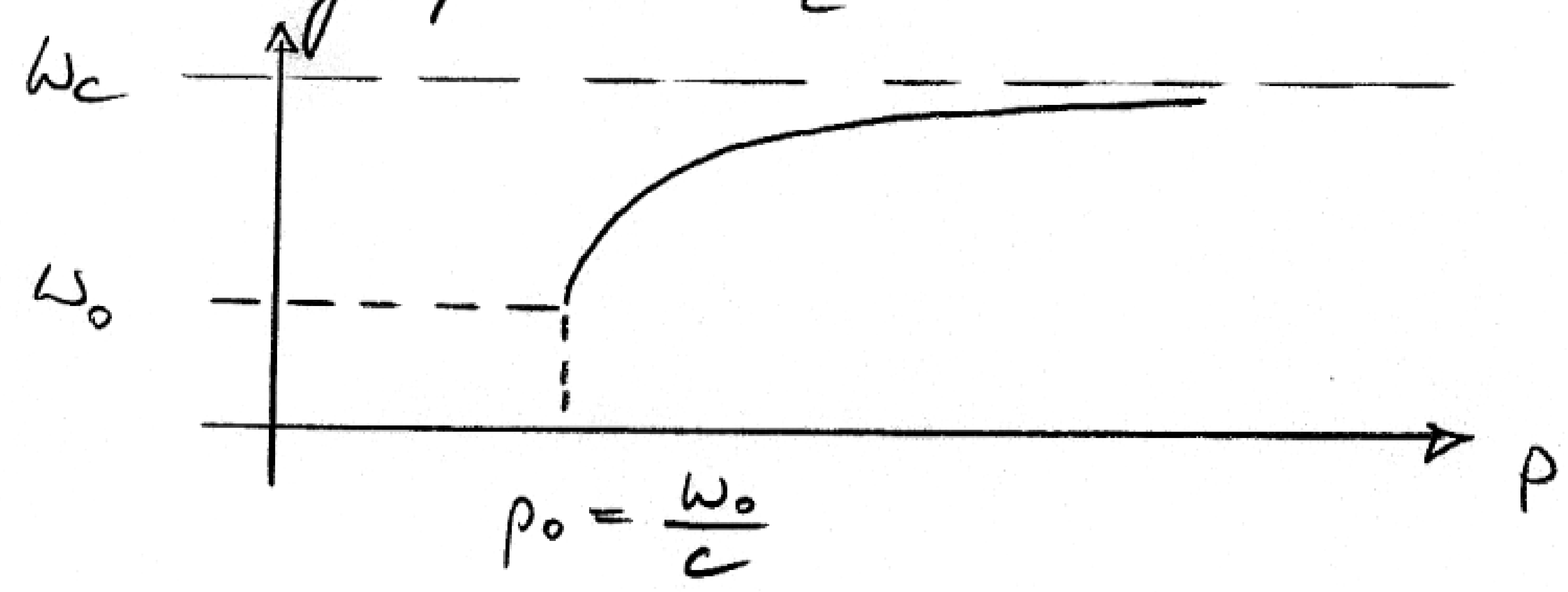
$p \to p_0$ für $\omega \to \omega_0$

$$\left(\frac{p_0 c}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\,\frac{\omega_p^2}{\frac{1}{2}\omega_p^2} = 1, \quad \text{d.h.} \quad \boxed{p_0 = \frac{\omega_0}{c}}$$

Graphische Lösung von (α) ergibt die Dispersionsrelation $p = p(\omega)$ zwischen der Wellenzahl p in Ausbreitungsrichtung und der Frequenz ω.



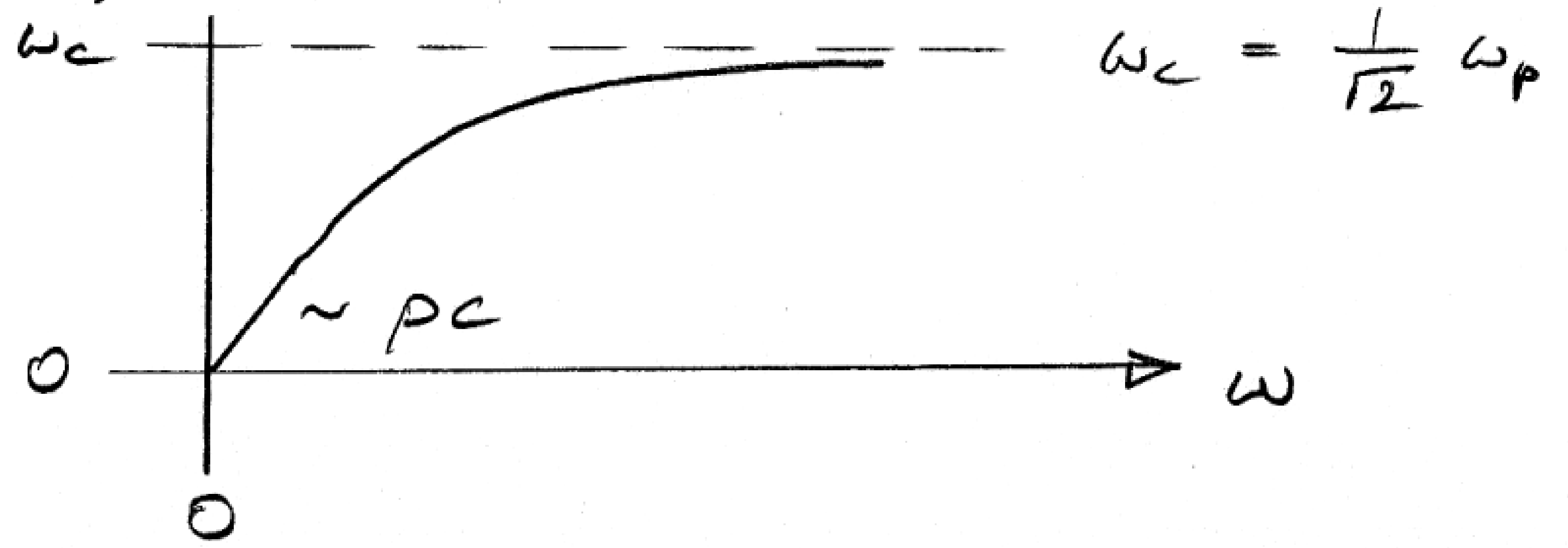
Die Lösung $\omega(p)$ steigt streng monoton mit wachsendem p, und hat die Asymptote ω_c.

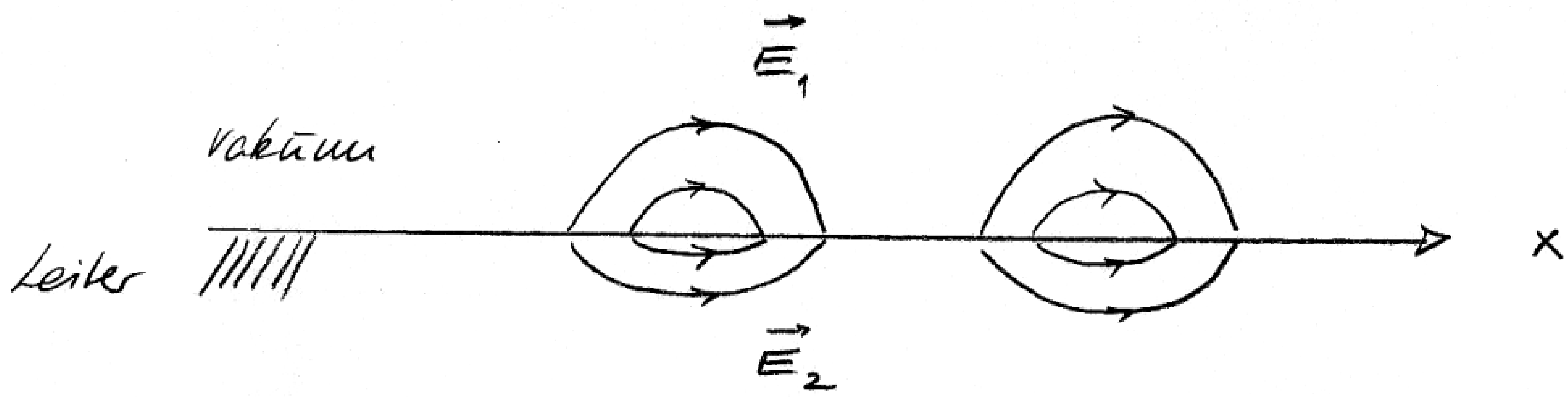


Zusammenfassend halten wir fest, daß Lösungen nur im Sperrgebiet von $\varepsilon(\omega)$ existieren und daß die Wellenlängen hinreichend klein sein müssen: $p < p_0 = \omega_0/c$.

κ läßt sich dann aus (β) für gegebenes ω berechnen und κ^{-1} gibt dann die Tiefe der Oberflächenwelle an.

Für Oberflächenplasmonen ($\omega_0 \to 0$) hat man $p_0 = 0$ und $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p$. Oberfl.-plasmonen existieren also für alle Wellenlängen. Ihre Dispersion bei kleinen ω ist linear.





E-Feld einer Oberflächenplasmonenwelle.