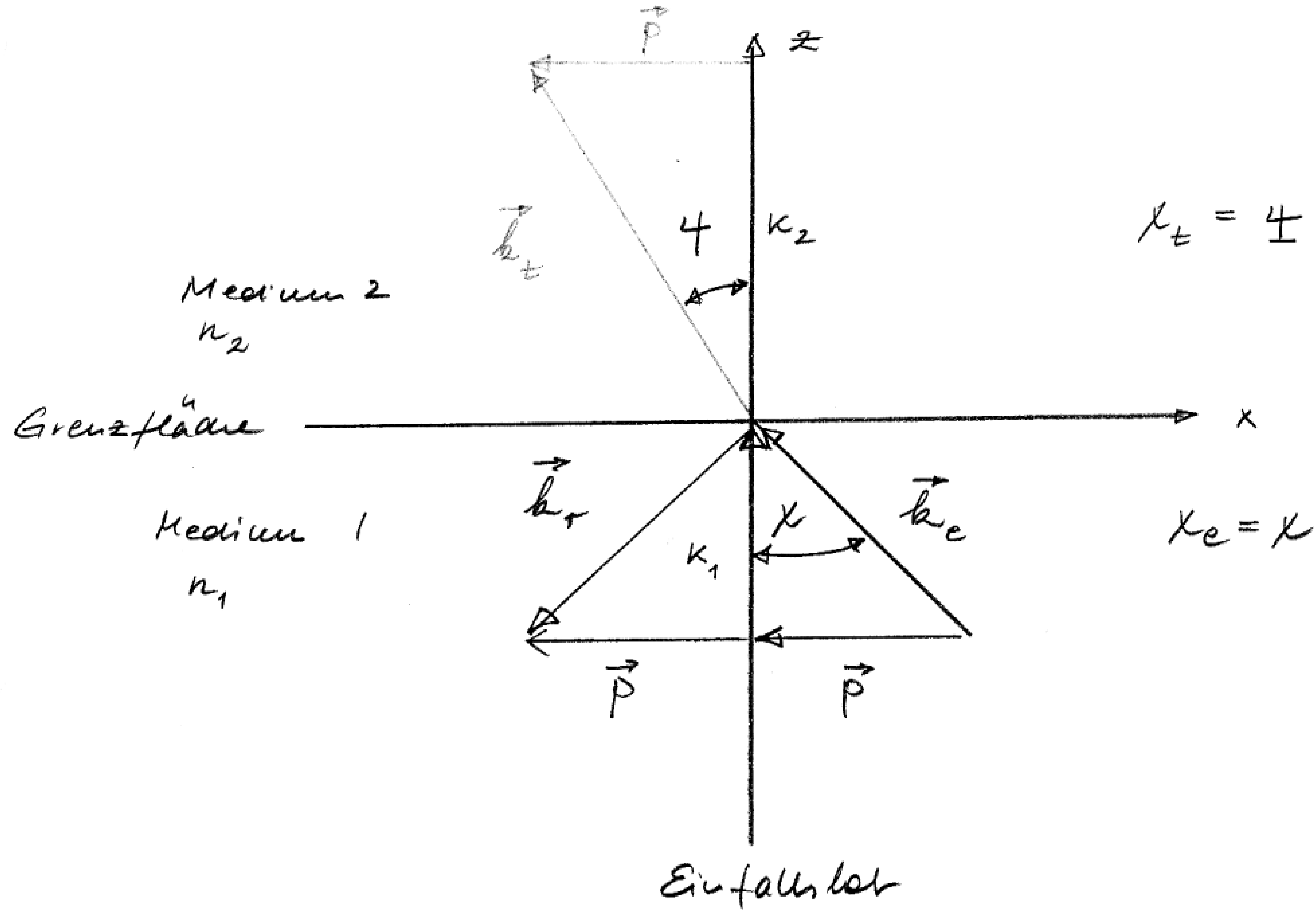
5.4. Allgemeine Reflexion und Brechung



Der Wellenvektor $\vec{k}_e = (\vec{p}_e, k_e)$ der einfallenden homogenen Welle schließe den Winkel χ_e mit dem Einfallslot $\vec{n} = (0,0,1)$ ein. Wir wählen die Einfallsebene $(\vec{k}_e, \vec{n})$ so, daß sie gleich der $(x-z)$-Ebene ist, d.h. $\vec{p} = (p, 0, 0)$.

Neben der einfallenden und der durchgehenden Welle wird es im allgemeinen auch eine reflektierte Welle geben; ohne die reflektierte Welle lassen sich i.a. die aus der Maxwell Theorie folgenden Stetigkeitsbedingungen beim Übergang von Medium 1 in Medium 2 nicht erfüllen.

Wie in Kapitel 5.1 diskutiert führen wir eine Fourierzerlegung der elem. Felder durch und betrachten die Fourierkomp.

$$\vec{E}^{\omega \vec{p}}(z) \quad \text{und} \quad \vec{B}^{\omega \vec{p}}(z), \ldots$$

Die beiden Fourierindices ω und $\vec{p}$ lassen wir im folgenden immer weg.

In jedem der beiden Halbräume ① und ② setzen wir an

$$z < 0: \quad \vec{E}(z) = \underbrace{\vec{E}_e e^{ik_1 z}}_{\text{einfallende Welle}} + \underbrace{\vec{E}_r e^{-ik_1 z}}_{\text{reflektierte Welle}}$$

analog für weitere elem. Felder

$$z > 0: \quad \vec{E}(z) = \underbrace{\vec{E}_t e^{ik_2 z}}_{\text{transmittierte (durchgehende) Welle}}$$

Beachte, daß sich beim Übergang von Medium 1 auf Medium 2 keine kinematischen Restriktionen an die Frequenz ω und den Wellenvektor $\vec{p}$ parallel zur Grenzschicht ergeben; dies liegt an der zeitlichen Translationsinvarianz und der Invarianz des Systems gegenüber Translationen parallel zur Grenzschicht.

Sei nun $\kappa_{1,2}$ reell. Dann liegen alle homogenen Wellen in der Ebene, die durch $(\vec{k}_e, \vec{n})$ aufgespannt wird (= Einfallsebene).

Aus der Gleichheit der Frequenzen ω folgt

$$\omega = \omega_1(\vec{k}) = \frac{c}{n_1}|\vec{k}_1| = c_1 k_1$$
$$= \omega_2(\vec{k}) = \frac{c}{n_2}|\vec{k}_2| = c_2 k_2$$

$$\sin \chi_e = \frac{p}{k_e} = \frac{p}{\omega} c_1$$
$$\sin \chi_t = \frac{p}{k_t} = \frac{p}{\omega} c_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \chi}{c} = \frac{p}{\omega} = \text{konstant} \; !$$

$$\boxed{n_1 \sin \chi = n_2 \sin \psi}$$

Snellius'sches Gesetz

Die kinematischen Einschränkungen an die Wellenausbreitung lauten

$$\frac{pc}{\omega} = n \sin \chi = \text{konstant}$$

und folglich

$$\chi_e = -\chi_r \,, \quad n_1 \sin \chi_e = n_2 \sin \chi_t$$

Wähle folgende Notation

$\chi = \chi_e = -\chi_r$ einfall. / refl. Welle

$\psi = \chi_t$ transm. Welle

(Beachte auch, daß $k_r = -k_e$)

Im folgenden verwenden wir nun die <u>dynamischen Einschränkungen</u>, die sich aus den <u>Stetigkeitsbedingungen</u> für die elem. Felder ergeben:

(1) Normalkomponente von $\vec{B}, \vec{D}$ stetig

(2) Tangentialkomponenten von $\vec{H}, \vec{E}$ stetig

Wir unterscheiden die Fälle, daß $\vec{E}$ <u>in</u> oder senkrecht zur Einfallsebene liegt

a) $\vec{E} \perp$ Einfallsebene : $\vec{E} = (0, E, 0)$

<u>$E_{tangential}$ stetig</u> $\Rightarrow$ $\boxed{E_e + E_r = E_t}$ (α)

<u>$H_{tangential}$ stetig</u>

$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{c}{\omega}(-\kappa E, 0, k E)$ (Faraday)

$\mu = 1 \curvearrowright \vec{B} = \vec{H}$ (Wähle $\mu = 1$!)

$\curvearrowright$ $\boxed{-\kappa_1 E_e + \kappa_1 E_r = -\kappa_2 E_t}$ (β)

Durch Kombination von (α) und (β) findet man

$$\boxed{\begin{aligned} E_t &= \frac{2k_1}{k_1+k_2}\, E_e \\ E_r &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\, E_e \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} &= t_\perp E_e \\ &= r_\perp E_e \end{aligned}$$

(Reflexions- und Transmissionskoeff.)

Wir verwenden nun weiter das Durchflutungsgesetz um die Dispersionsrelation zu erhalten

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\omega^2}{c^2} = p^2 + k_i^2 \\ \curvearrowright k_i^2 = \dfrac{\omega^2 n_i^2}{c^2}\left(1-\left(\dfrac{pc}{n_i\omega}\right)^2\right) = \left(\dfrac{\omega n_i}{c}\right)^2 \left(1-\sin^2\chi_i\right) \\ \qquad = \left(\dfrac{\omega n_i}{c}\right)^2 \cos^2\chi_i \quad ; \quad (i = 1,2 \triangleq e, r) \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c}\, n_1 \cos\chi \\ k_2 &= \frac{\omega}{c}\, n_2 \cos\psi \end{aligned}\right\}$$

dies sind schlicht die Projektionen der Wellenvektoren in den Medien 1 und 2 auf das Einfallslot

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1\cos\chi - n_2\cos\psi}{n_1\cos\chi + n_2\cos\psi} =$$

$$\underset{\text{Snellius}}{=} \frac{\sin\psi\cos\chi - \sin\chi\cos\psi}{\sin\psi\cos\chi + \sin\chi\cos\psi}$$

$$\underset{\text{Add. theoreme}}{=} \frac{\sin(\psi-\chi)}{\sin(\psi+\chi)} = -\frac{\sin(\chi-\psi)}{\sin(\chi+\psi)}$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = -\frac{\sin(\chi-\psi)}{\sin(\chi+\psi)}} \qquad (1F)$$

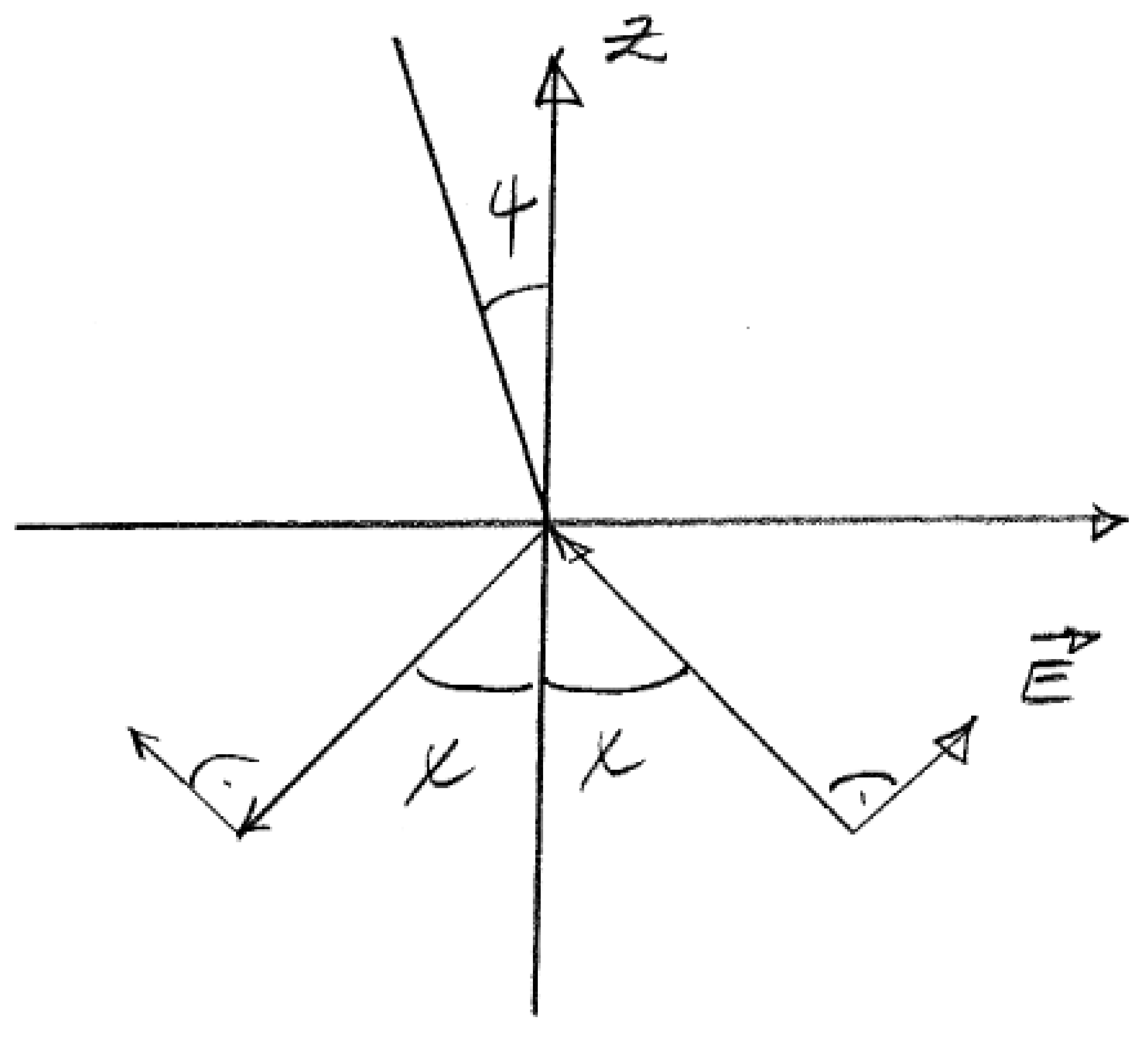
$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2k_1}{k_1+k_2} = \frac{2n_1\cos\chi}{n_1\cos\chi + n_2\cos\psi} =$$

$$= \frac{2\frac{n_1}{n_2}\cos\chi}{\frac{n_1}{n_2}\cos\chi + \cos\psi} = \frac{2\frac{\sin\psi}{\sin\chi}\cos\chi}{\frac{\sin\psi}{\sin\chi}\cos\chi + \cos\psi} =$$

$$= \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin\psi\cos\chi + \sin\chi\cos\psi} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)}$$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_e} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)}} \qquad (2F)$$

b) $E \parallel$ Einfallsebene : $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$



$E_x = E\cos\chi$

$E_z = E\sin\chi$

$E_{\text{tangential}}$ stetig:

$\rightsquigarrow \boxed{(E_e - E_r)\cos\chi = E_t\cos\psi} \quad (\alpha')$

$H_{\text{tangential}}$ stetig: $\vec{B} = \frac{c}{\omega}\vec{k}\times\vec{E} = \frac{kc}{\omega}(0, E, 0)$

$\rightsquigarrow k_1(E_e + E_r) = k_2 E_t \quad \Big| \quad \begin{pmatrix} k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \\ k_2 = \frac{\omega}{c}\cdot n_2 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow \boxed{n_1(E_e + E_r) = n_2 E_t} \quad (\beta')$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_e} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)\cos(\chi-\psi)}} \qquad (3F)$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = \frac{\tan(\chi-\psi)}{\tan(\chi+\psi)}} \qquad (4F)$$

Nebenrechnung

- $(\alpha')\cdot n_2 - (\beta')\cos\psi$:

$$(E_e - E_r)\, n_2 \cos\chi - n_1 \cos\psi\, (E_e + E_r) = 0$$

$$E_e\,[n_2\cos\chi - n_1\cos\psi] = E_r\,[n_2\cos\chi + n_1\cos\psi]$$

$$\curvearrowright \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_2\cos\chi - n_1\cos\psi}{n_2\cos\chi + n_1\cos\psi} = \frac{\cos\chi - \frac{n_1}{n_2}\cos\psi}{\cos\chi + \frac{n_1}{n_2}\cos\psi}$$

$$= \frac{\cos\chi - \frac{\sin\psi}{\sin\chi}\cos\psi}{\cos\chi + \frac{\sin\psi}{\sin\chi}\cos\psi} = \frac{\sin\chi\cos\chi - \sin\psi\cos\psi}{\sin\chi\cos\chi + \sin\psi\cos\psi} =$$

$$= \frac{\sin 2\chi - \sin 2\psi}{\sin 2\chi + \sin 2\psi}$$

$$= \frac{\cos(\chi+\psi)\sin(\chi-\psi)}{\sin(\chi+\psi)\cos(\chi-\psi)} = \frac{\tan(\chi-\psi)}{\tan(\chi+\psi)}$$

- $(\alpha')\cdot n_1 + (\beta')\cos\chi$

$$E_e\,(n_1\cos\chi + n_1\cos\chi) = E_t\,(n_1\cos\psi + n_2\cos\chi)$$

$$\curvearrowright \frac{E_t}{E_e} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin\psi\cos\psi + \sin\chi\cos\chi} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)\cos(\chi-\psi)}$$

Fresnelsche Formeln

$\vec{E} \perp$ Einfallsebene

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = -\frac{\sin(\chi-\psi)}{\sin(\chi+\psi)} \qquad \frac{E_t}{E_e} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)}}$$

$\vec{E}$ in Einfallsebene

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = \frac{\tan(\chi-\psi)}{\tan(\chi+\psi)} \qquad \frac{E_t}{E_e} = \frac{2\sin\psi\cos\chi}{\sin(\chi+\psi)\cos(\chi-\psi)}}$$

Diskussion

Wenn das Medium 2 „optisch dichter" als das Medium 1 ist, d.h. $n_2 > n_1$, so existiert nach dem Snellius'schen Brechungsgesetz

$$\sin\psi = \underbrace{\frac{n_1}{n_2}}_{<1}\sin\chi$$

zu jedem Einfallswinkel χ ein reeller Brechungswinkel ψ. Falls aber das Medium 1 das optisch dichtere ist, d.h. $n_1 > n_2$, so gibt es reelle Lösungen nur, wenn $\sin\chi < \frac{n_2}{n_1}$ ist. Den Fall $\sin\chi > \frac{n_2}{n_1}$ (Totalreflexion) diskutieren wir später noch im Detail. Hier schließen wir diesen Fall aus.

$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$

E_r/E_e und E_t/E_e sind reell

$\curvearrowright$ Phasen der reflektierten und gebrochenen Welle unterscheiden sich von der eingehenden Welle gar nicht oder um π (Faktor -1).

Vorzeichenkonvention: Nach den obigen Skizzen bezeichnet man die Komponenten der gebrochenen Welle als gleichphasig mit der einfallenden Welle, wenn $E_t/E_e > 0$. Bei der reflektierten Welle müssen wir die Fälle $\vec{E} \perp$ und $\parallel$ zur Einfallsebene unterscheiden. Falls $\vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{n})$ sind einfallende und reflektierte Welle gleichphasig für $E_r/E_e > 0$; falls $\vec{E} \parallel (\vec{k}, \vec{n})$ sind einfallende und reflektierte Welle gleichphasig wenn $E_r/E_e < 0$.

Aus den Fresnelschen Formeln lesen wir nun ab:

(i) $E_t/E_e > 0$, d.h. kein Phasensprung zwischen einfallender und durchgehender Welle.

(ii) Reflektierte Welle: $n_2 > n_1 \curvearrowright \varphi > \psi$
Dann $E_r/E_e < 0$

- Komponente $\perp$ Einfallsebene macht einen Phasensprung um π.

– Komponente ∥ Einfallsebene

∘ falls $\chi + \psi < \frac{\pi}{2}$ (also $\tan(\chi+\psi) > 0$)

⇝ $E_r/E_0 > 0$, d.h. auch diese Komponente macht einen Phasensprung um π

∘ bei größeren Winkeln ($\chi + \psi > \frac{\pi}{2}$) sind die Komponenten in Phase

(iii) Reflektierte Welle: $n_1 > n_2$ ⇝ $\chi < \psi$
dann drehen sich die Vorzeichen in den reflektierten Anteilen gerade um. Folglich macht die $\perp$ Komponente keinen Phasensprung, und die ∥ Komponente ebenfalls nicht bis $\chi + \psi = \frac{\pi}{2}$; oberhalb dieses Werts springt die ∥ Komponente dann um π.

(iv) Senkrechter Einfall $\chi = 0$
Dann werden die Fresnel Formeln unbrauchbar. Setze in früheren Ausdrücken
$\cos\chi = \cos\psi = 1$

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

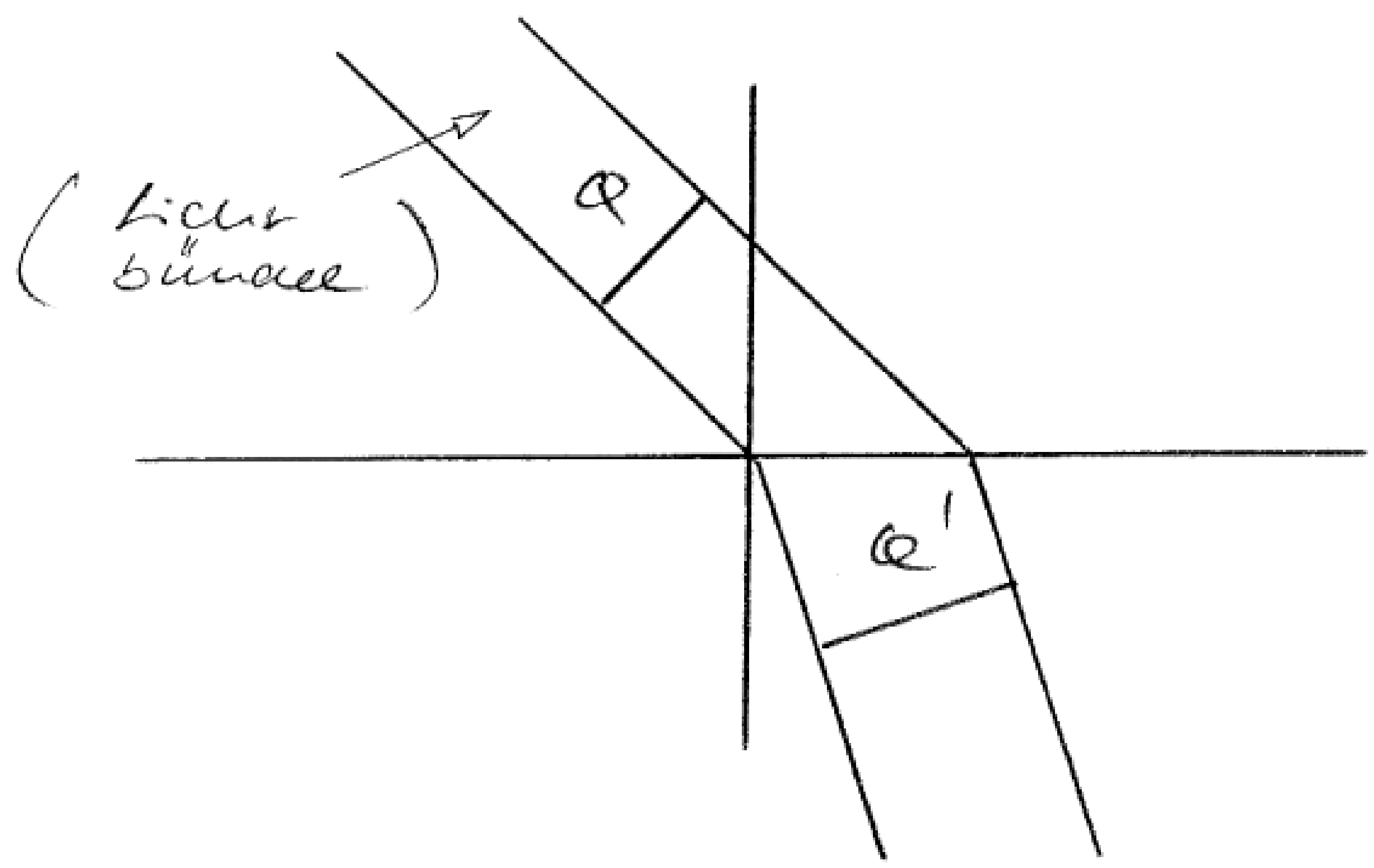
$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2 n_1}{n_2 + n_1}$$

Der Unterschied zwischen der $\perp$ und ∥ Komponente ist verschwunden, der Begriff der Einfallsebene bedeutungslos geworden.

Der Betrag des Poynting Vektors, d. h. die Lichtintensität, ist gegeben durch $(\mu = 1)$

$$|\vec{S}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{siehe 3.6.}}}{=} \frac{c}{4\pi}|\vec{E}\times\vec{H}| = \frac{c}{4\pi}\underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{n}\, E^2$$

Um nun die Intensitäten des gespiegelten und gebrochenen Lichts mit Hilfe der Fresnelschen Formeln zu bestimmen, muß man bedenken, daß der Querschnitt q eines Lichtbündels bei der Brechung sich ändert.



R = Reflexionsvermögen

$$= \frac{|S_r|\cos\chi}{|S_e|\cos\chi} = \begin{cases} \dfrac{\tan^2(\chi-\psi)}{\tan^2(\chi+\psi)}\,; & \parallel \\[2ex] \dfrac{\sin^2(\chi-\psi)}{\sin^2(\chi+\psi)}\,; & \perp \end{cases}$$

T = Durchlässigkeit

$$= \frac{|S_t|\cos\psi}{|S_e|\cos\chi} = \begin{cases} \dfrac{\sin 2\chi\,\sin 2\psi}{\sin^2(\chi+\psi)\cos^2(\chi-\psi)}\,; & \parallel \\[2ex] \dfrac{\sin 2\chi\,\sin 2\psi}{\sin^2(\chi+\psi)}\,; & \perp \end{cases}$$

Man verifiziert, daß

$$R + T = 1$$

ist, wie nach dem Energieerhaltungssatz gelten muss.

Bei senkrechtem Einfall haben wir

$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2 , \quad T = \frac{4 n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

$$\lim_{n_1 \to n_2} R = 0 \quad , \quad \lim_{n_1 \to n_2} T = 1$$

Je weniger der optische Unterschied zweier Medien desto weniger Energie verliert ein durch ihre Grenze tretender Lichtstrahl durch Reflexion.

Für streifenden Einfall, $\chi = \frac{\pi}{2}$, wird $R = 1$.

Die Nenner der Ausdrücke für R und T bleiben immer endlich mit einer Ausnahme: Für $\chi + 4 = \pi/2$ wird $\tan(\chi + 4) = \infty$ und damit $R_{\parallel} = 0$. Dann wird also die Komponente des E-Feldes $\parallel$ Einfallsebene nicht reflektiert. $4 + \chi = \frac{\pi}{2}$ heißt, daß reflektierter und gebrochener Strahl aufeinander $\perp$ stehen $\rightarrow$ Skizze