Anwendung: Der optische Frequenzkamm

Ziel: Präzisionsmessung einer optischen Frequenz f_1 ($\sim 10^{15}$ Hz) mit der Genauigkeit 10^{-15} ($\delta f_1 \sim 1$ Hz)!

Anders ausgedrückt: „Wie zählt man fehlerfrei von 0 auf 10^{15} in einer Sekunde?"

Die Genauigkeit 10^{-15} ist völlig absurd, solche Genauigkeiten werden mit Ausnahme der (Wasserstoff-)Spektroskopie in keinem physikalischen Experiment erreicht. Damit läßt sich die zeitliche Konstanz von Naturkonstanten überprüfen, z.B. die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$.

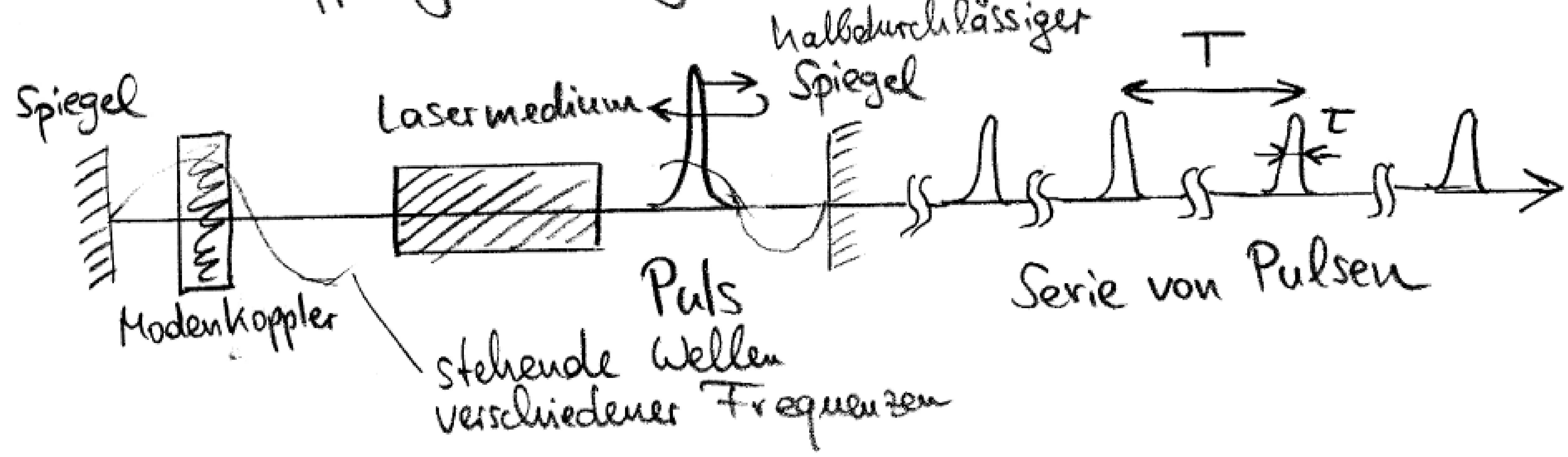
Kann man sich 10^{15} veranschaulichen? 10^6 € entsprechen ungefähr dem durchschnittlichen Lebenseinkommen in Deutschland, die Anzahl aller Menschen ist von der Größenordnung 10^9. Nimmt man also das Lebenseinkommen aller zur Zeit lebenden Menschen – vorausgesetzt sie haben Löhne wie in der 1. Welt –, erhält man einen Betrag $\sim 10^{15}$ €.
Zweites Beispiel: Eine Linie von München bis Rosenheim (70 km) enthält etwa 10^{15} Atome (10^{-10} m) – aber bitte nicht verzählen!

Methode: Überlagere das Signal mit einem Referenzsignal genau bekannter Frequenz $f_2 \approx f_1$ und messe die Schwebungsfrequenz: $f_{12} = f_1 - f_2$. Diese Differenz kann beliebig klein werden, wenn man genügend Referenzfrequenzen hat. $f_{12} \sim 1$ GHz läßt sich problemlos zählen (Computer), elektronische Messungen sind bis 100 GHz möglich.

Die Cs-Atomuhr als Standardreferenz tickt mit 9,2 GHz etwa 100000mal zu langsam. Um optische Frequenzen zu messen, muß man also die Lücke zwischen Licht und Mikrowellen überbrücken. Das ist mit einem optischen Frequenzkamm möglich, der die Referenz f_2 mit einer Genauigkeit 10^{-15} liefert. → Theodor Hänsch und John Hall, Nobelpreis 2005.

Ein diskretes Frequenzspektrum erfordert eine <u>zeitlich periodische Pulsfolge</u>. Diese erhält man aus modengekoppelten Lasern. Diese haben keine stehende Welle im Resonator, sondern verstärken einen hin- und herlaufenden Puls. Um einen breiten Frequenzkamm zu erhalten, muß das Lasermedium ein breites Frequenzband verstärken. Man benutzt z.B. Titan-Saphir-Laser, neuerdings auch erbium- oder ytterbiumdotierte Faserlaser. Bei letzteren besteht der Resonator aus einem geschlossenen Ring aus optischen Fasern.

- ein kurzer Puls der Dauer $\tau \approx 20 fs$ läuft im Resonator des Lasers umher, Resonatorlänge z.B. $L \approx 25 cm$.
  Dann ist der Abstand zwischen den Pulsen $T = \frac{v_g}{2L}$, v_g ist die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets.



- Pulsdauer $\Rightarrow$ Breite des Spektrums $\approx \frac{1}{\tau} \approx 50 THz$
- Wiederholrate: $\frac{1}{T} = f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} \approx 600 MHz$

  f_r ist „langsam", d.h. elektronisch sehr genau meßbar $\delta f_r \sim 1 Hz$

Die Einhüllende des Pulses läuft mit v_g, die Trägerwelle jedoch mit der Phasengeschwindigkeit v_{phase}. Das führt je Runde zu einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Einhüllender und Trägerwelle.

$\Rightarrow$ die Einhüllende ist zwar periodisch, aber das elektrische Feld nicht.

Wir schreiben einen einzelnen Puls mit Trägerfrequenz ω_c (carrier) als bei $x=0$.

$$E_p(t) = a_p(t)e^{-i\omega_c t} + c.c.$$

$\uparrow$ damit $E_p(t)$ reell ist

[ähnlich wie in der letzten Vorlesung für das Gaußsche Paket $\phi(x) = e^{ik_p x}\phi_\sigma(x)$, jetzt an festem Ort statt bei fester Zeit.]

Dann ist eine Serie von Pulsen mit „Phasenschlupf" $\Delta\varphi$:

$$\boxed{E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_p(t-nT)e^{-i\omega_c t}e^{-in\Delta\varphi} + c.c.}$$

Das Spektrum dieses Signals erhalten wir durch Fourier-Transformation:

$$E(x,t) = \int\frac{d\omega}{2\pi}e^{-i\omega t}\hat{E}(x,\omega), \quad \hat{E}(x,\omega) = \hat{a}(\omega)e^{ik(\omega)x}$$

$$\hat{a}(\omega) = \int dt\, e^{i\omega t}E(x=0,t)$$

$$= \int dt\, e^{i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_p(t-nT)e^{-i\omega_c t}e^{-in\Delta\varphi} + \overset{\omega\leftrightarrow-\omega}{c.c.}$$

$t' = t - nT$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\int dt'\, e^{i(\omega-\omega_c)(t'+nT)}a_p(t')e^{-in\Delta\varphi} + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{i(\omega-\omega_c-\Delta\varphi/T)nT}\underbrace{\int dt'\, e^{i(\omega-\omega_c)t'}a_p(t')}_{\hat{a}_p(\omega-\omega_c)} + \dots$$

$$= \hat{a}_p(\omega-\omega_c)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left[i\left(\omega-\omega_c-\frac{\Delta\varphi}{T}\right)nT\right] + \dots$$

Benutze Darstellung der 2π-periodischen δ-Funktion:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{inx} = \delta_{2\pi}(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-2\pi n),$$

außerdem ist $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$.

$$\hat{a}(\omega) = \hat{a}_p(\omega-\omega_c)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\delta\left(\omega-\omega_c-\frac{\Delta\varphi}{T}-\frac{2\pi n}{T}\right) + \dots$$

Definiere $\omega_r := \frac{2\pi}{T}$ und Offset ω_0 durch

$\omega_0 + m\omega_r = \omega_c + \frac{\Delta\varphi}{T}$ so, daß $\omega_0 < \omega_r$

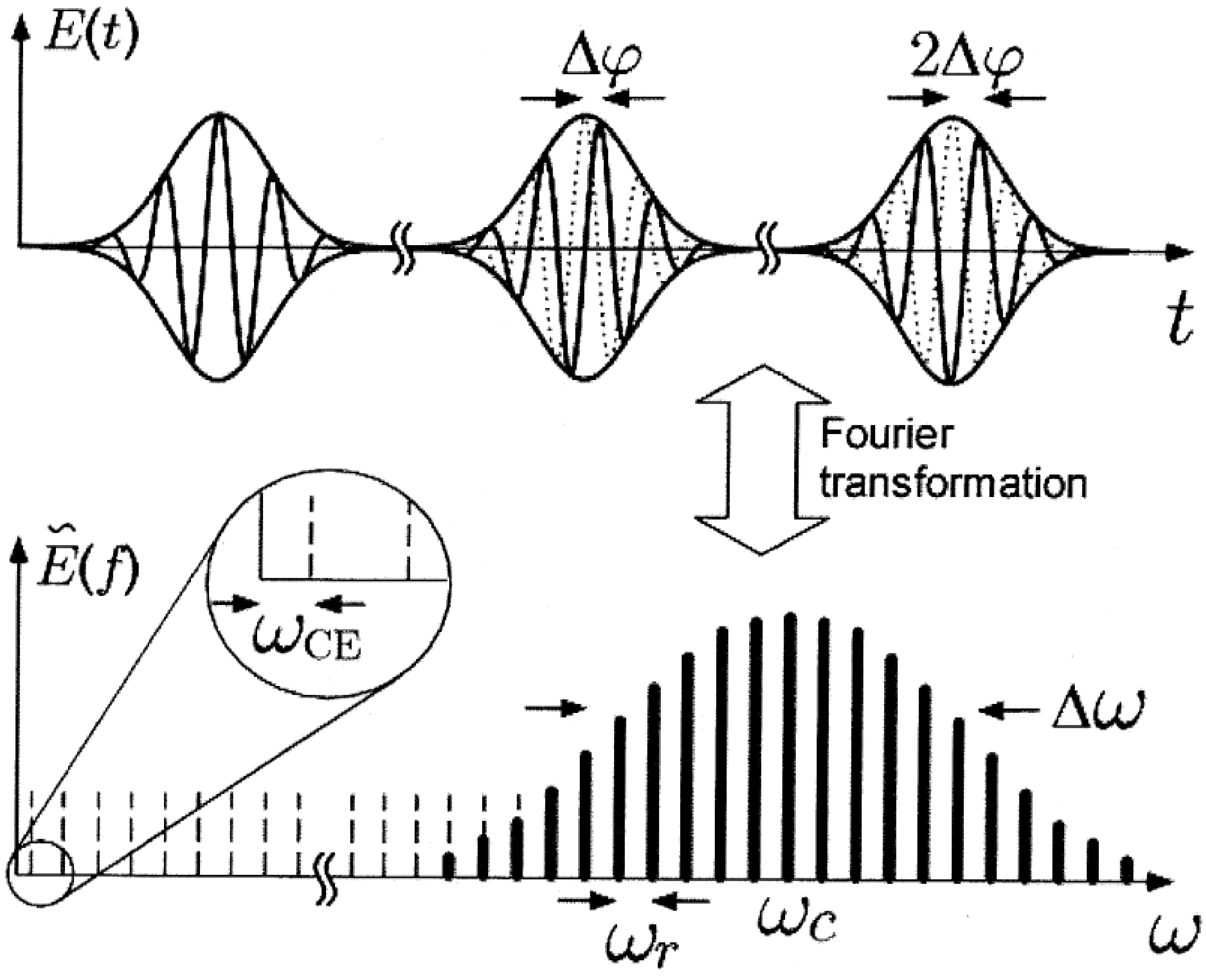
$\Rightarrow$ Umnumerierung:

$$\boxed{\hat{a}(\omega) = \hat{a}_p(\omega-\omega_c)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega_r\delta(\omega-\omega_0-n\omega_r) + \overset{\omega\leftrightarrow-\omega}{c.c.}}$$

Ergebnis: Das Spektrum ist ein Frequenzkamm mit äquidistanten Frequenzen ω_0, $\omega_0 + \omega_r$, … … $\omega_0 + n\omega_r$, $\omega_0 + (n+1)\omega_r$, …

Die Stärke/Intensität der Linien wird von der Einhüllenden $\hat{A}_p(\omega-\omega_c)$ bestimmt, das Spektrum aus diskreten Linien ist also um ω_c konzentriert.

Der Linienabstand wird von der Pulswiederholrate bestimmt, $\omega_r = \frac{2\pi}{T}$.



Durch Messung des Abstands $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ und des Offsets $f_0 = \frac{\omega_r}{2\pi}$ sind sämtliche Frequenzen des Kamms bestimmt. Beide Frequenzen sind im Radiobereich ($\sim 1\,\mathrm{GHz}$) und lassen sich elektronisch zählen ($\delta f \sim 1\,\mathrm{Hz}$). Der Sprung zu optischen Frequenzen $f_n = f_0 + n f_r$ ($\sim 10^{15}\,\mathrm{Hz}$) geschieht durch sehr große $n \sim 10^6$. Es ist erstaunlich, daß die guten Kammeigenschaften (Kohärenz und Äquidistanz) selbst für so große n erhalten bleiben.

Moderne Frequenzkämme umfassen bis zu 10^6 diskrete Linien und überdecken das gesamte optische Spektrum (400–800 THz) mit einem feinen Raster im GHz-Bereich. Insbesondere enthalten sie eine ganze Oktave, d.h. neben der (roten) Frequenz $f_n = n f_r + f_0$ enthalten sie auch die (blaue) Frequenz $f_{2n} = 2n f_r + f_0$.

Solch ein breites Spektrum erreicht man nicht mehr direkt durch immer kürze Pulsdauern. Stattdessen verbreitert man einen schmaleren Frequenzkamm mit Hilfe nichtlinearer Effekte. Dabei kann man erreichen, daß die Phasen-Kohärenz und Äquidistanz der einzelnen Linien erhalten bleibt.

Messung von f_r und f_0:

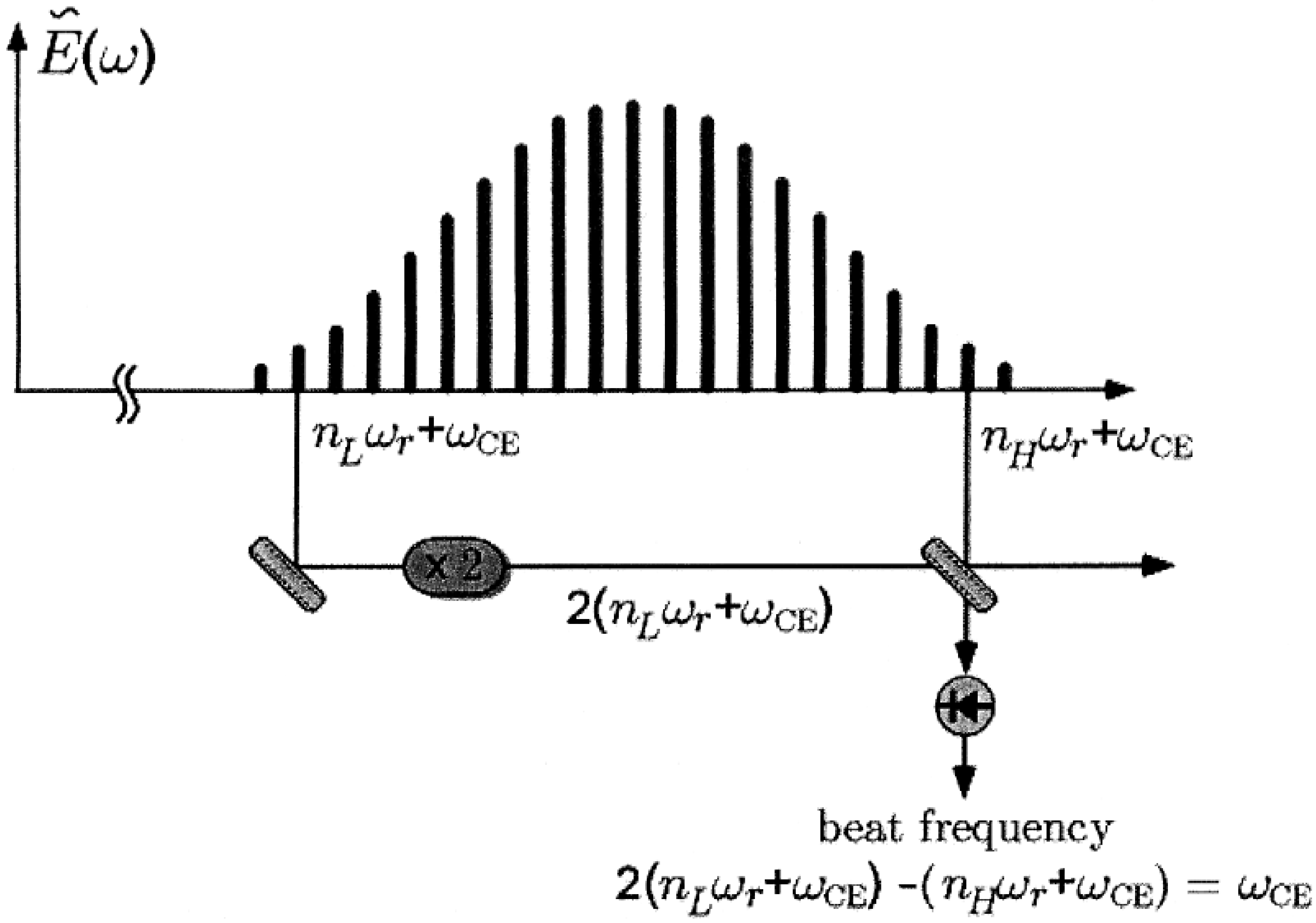
- Die Pulswiederholrate f_r bestimmt man leicht mit einer Photodiode, indem man die Intensität der auftreffenden Pulse registriert.
- Die Offsetfrequenz f_0 erhält man mit überschaubarem Aufwand, wenn der Kamm eine ganze Oktave überdeckt:
  - verdopple die rote Frequenz f_n zu $2f_n = 2(n f_r + f_0)$
  - überlagere diese mit der blauen Frequenz $f_{2n} = 2n f_r + f_0$
  - $\Rightarrow$ die Schwebungsfrequenz $2f_n - f_{2n} = f_0$ läßt sich wieder mit einer Photodiode messen.

zur Schwebung:

überlagere $E_1(t) = E\cos(\omega_1 t)$ und $E_2 = E\cos(\omega_2 t)$, dann ist die gemessene Intensität:

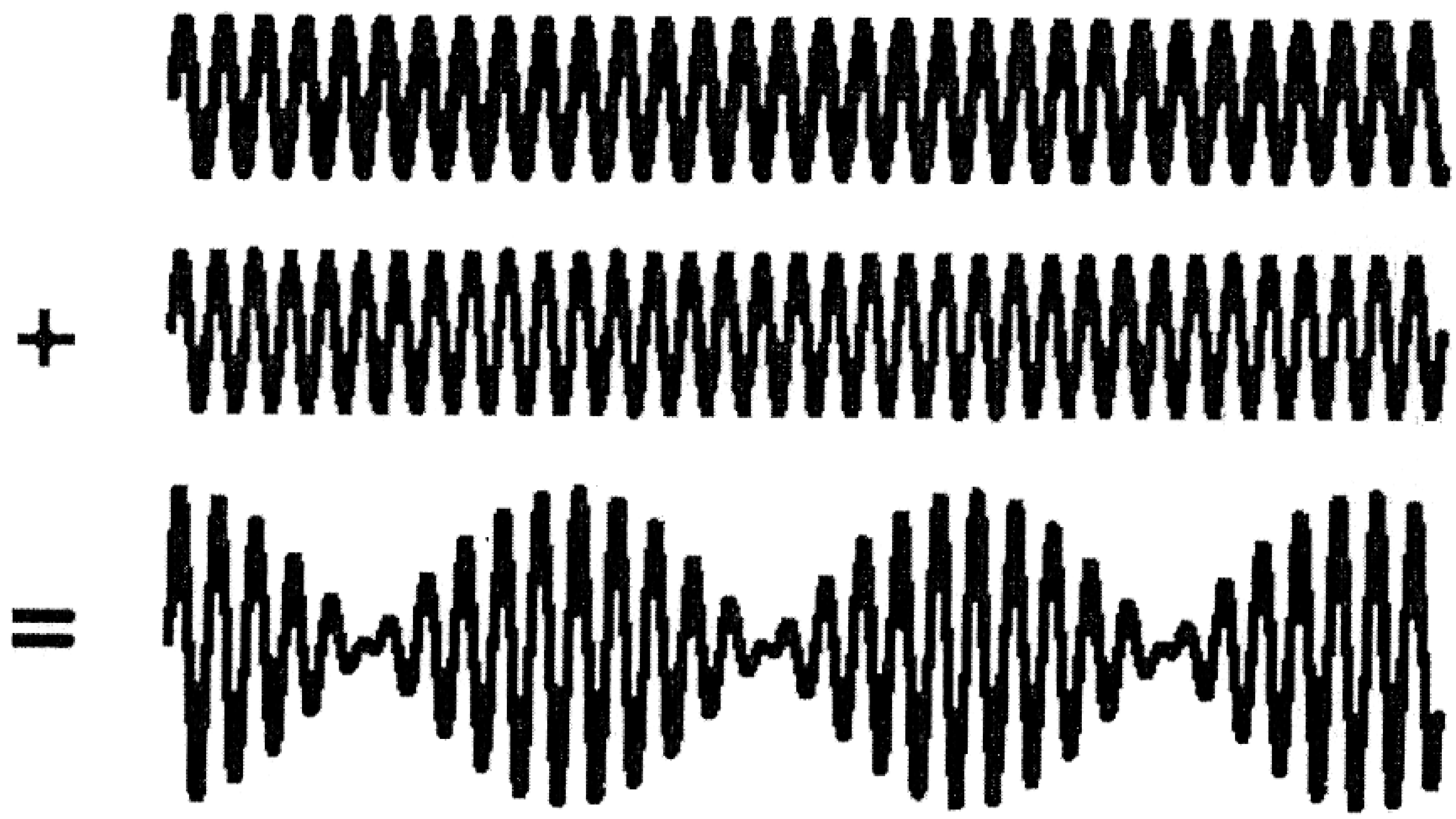
$$I(t) = |E_1(t) + E_2(t)|^2 = E^2\left[\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right]^2$$

$$= \underbrace{E^2\left[\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + 1\right]}_{\text{langsame Schwebungsfrequenz } \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}}\left[\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + 1\right]$$



$\tilde{E}(\omega)$
$n_L\omega_r+\omega_{CE}$
$n_H\omega_r+\omega_{CE}$
x 2
$2(n_L\omega_r+\omega_{CE})$
beat frequency
$2(n_L\omega_r+\omega_{CE})-(n_H\omega_r+\omega_{CE})=\omega_{CE}$

beat note



+
=

Wie funktioniert nun die Absolutmessung einer unbekannten Frequenz f_x?

1) Eichung des Frequenzkamms, z.B. mittels einer Cs-Atomuhr
$\Rightarrow$ Bestimmung von f_0 und f_r (und Stabilisierung des Kammes)

2) grobe Bestimmung der unbekannten Frequenz f_x mit herkömmlichen Methoden (Genauigkeit 10^{-6})
$\Rightarrow$ Ermittlung der Referenzmode $f_n = n f_r + f_0$, also der ganzen Zahl n (Größenordnung 10^6!)

3) Interferenz des unbekannten Signals mit dem gesamten Kamm $\Rightarrow$ die langsamste Schwebungsfrequenz f_S liefert die Differenz $f_x - f_n$.
[Schwebungen mit benachbarten Referenzmoden sind um f_r größer, d.h. deutlich unterscheidbar.]

Damit ist f_x auf ~1Hz genau bestimmt, für optische Frequenzen erreicht man also eine Genauigkeit 10^{-15}.

Weitere Informationen:
Udem, Holzwarth & Hänsch, Nature 416, 233 (2002).
http://www.mpq.mpg.de/~haensch/comb/research.html