4. FREIE WELLEN

4.1. Lineare Feldgleichungen

Wir betrachten eine allgemeine Feldtheorie mit N Feldern $F_\beta(\vec{x},t)$; $\beta = 1, 2, \dots, N$ und $\vec{x}$ ein d-dimensionaler euklidischer Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Die Feldgleichungen seien <u>linear in den Feldern</u> F_β:

$$(*) \quad \boxed{\sum_{\beta=1}^{N} C^{\alpha\beta}_{n_0 \dots n_d} \, \partial_t^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_\beta(\vec{x},t) = I^\alpha(\vec{x},t)}$$

Die Zahl der Feldgleichungen sei M: $\alpha = 1, \dots, M$. I^α heißt Quelle oder Inhomogenität der linearen Feldgleichungen.

<u>Maxwellgleichungen:</u>

6 Felder: $\vec{E}, \vec{B}$ $\rightsquigarrow$ $N = 6$

Die Maxwellgleichungen ergeben 8 Gleichungen vom Typ $(*)$ $\rightsquigarrow$ $M = 8$

Raumdimension ist $d = 3$

Unter <u>freien Wellen</u> (Lösungen) versteht man Lösungen von $(*)$ mit $\underline{I^\alpha(\vec{x},t) \equiv 0}$ für $\alpha = 1, \dots, M$.

Wir suchen nun nach <u>speziellen Lösungen</u> von $(*)$ und machen den <u>Lösungsansatz</u>

$$\boxed{F_\beta(\vec{x},t) = F_\beta^0 \, e^{i\varphi(\vec{x},t)} \; ; \quad \varphi(\vec{x},t) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t}$$

F_β° reiner Amplitude
φ reiner Phase

Wir setzen diesen Lösungsansatz in (*) ein:

$$\partial_\ell F_\beta(\vec{x},t) = F_\beta^\circ e^{i\varphi}(ik_\ell)$$

$$\partial_t F_\beta(\vec{x},t) = F_\beta^\circ e^{i\varphi}(-i\omega)$$

i.e. $\partial_\ell \to ik_\ell$; $\partial_t \to -i\omega$ *)

Dann erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit N unbekannten Amplituden F_β° und M Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^{N} \underbrace{C^{\alpha\beta}_{n_0 \dots n_d} (-i\omega)^{n_0}(ik_1)^{n_1} \dots (ik_d)^{n_d}}_{M \times N \text{ Matrix}} F_\beta^\circ = 0$$

(→ Standardsätze und -methoden für Lösung linearer Gleichungssysteme)

Falls $\omega = \omega_R + i\omega_I$ $(\omega_R, \omega_I \in \mathbb{R})$

dann $|F_\alpha| = \underbrace{|F_\alpha^\circ e^{i\vec{k}\vec{x}}|}_{\text{zeitlich konstant}} \underbrace{e^{\omega_I t}}_{\text{exponentiell}}$

und analog für $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$

$$|F_\alpha| = |F_\alpha^\circ e^{-i\omega t}| \, e^{-\vec{k}_I \cdot \vec{x}} .$$

---

*) Beispiele:

Sei ρ ein skalares Feld mit $\rho = \rho_0 e^{i\varphi}$, dann gilt $\operatorname{grad}\rho = i\vec{k}\rho$. Falls $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\varphi}$, dann $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = i\vec{k}\cdot\vec{A}$ und $\vec{\nabla}\times\vec{A} = i\vec{k}\times\vec{A}$.

4.2. Ebene monochromatische Wellen

$$t_{i_1 \dots i_N}(\vec{x},t) = t^{\circ}_{i_1 \dots i_N} \, e^{i\varphi(\vec{x},t)}$$

mit $\varphi(\vec{x},t) = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$

$t_{\dots}$ Tensor, $\vec{k}$ Vektor, φ Skalar

(a) $t^{\circ}_{i_1 \dots i_N}$ heisst komplexe Amplitude der Welle

$$= \underbrace{A_{i_1 \dots i_N}}_{\text{Betrag}} \, e^{i \overbrace{\delta_{i_1 \dots i_N}}^{\text{Phase}}}$$

$$t_{\dots} = A_{\dots}\left[\cos(\varphi + \delta_{\dots}) + i \sin(\varphi + \delta_{\dots})\right]$$

reelle Lösungen der Theorie

(b) $t_{\dots}(x, t+T) = t_{\dots}(x,t)$

falls $T = 2\pi/\omega$

T heisst <u>Schwingungsdauer</u> der Welle

ω –"– (Kreis) <u>frequenz</u> –"–

$\omega = 2\pi\nu = 2\pi f$

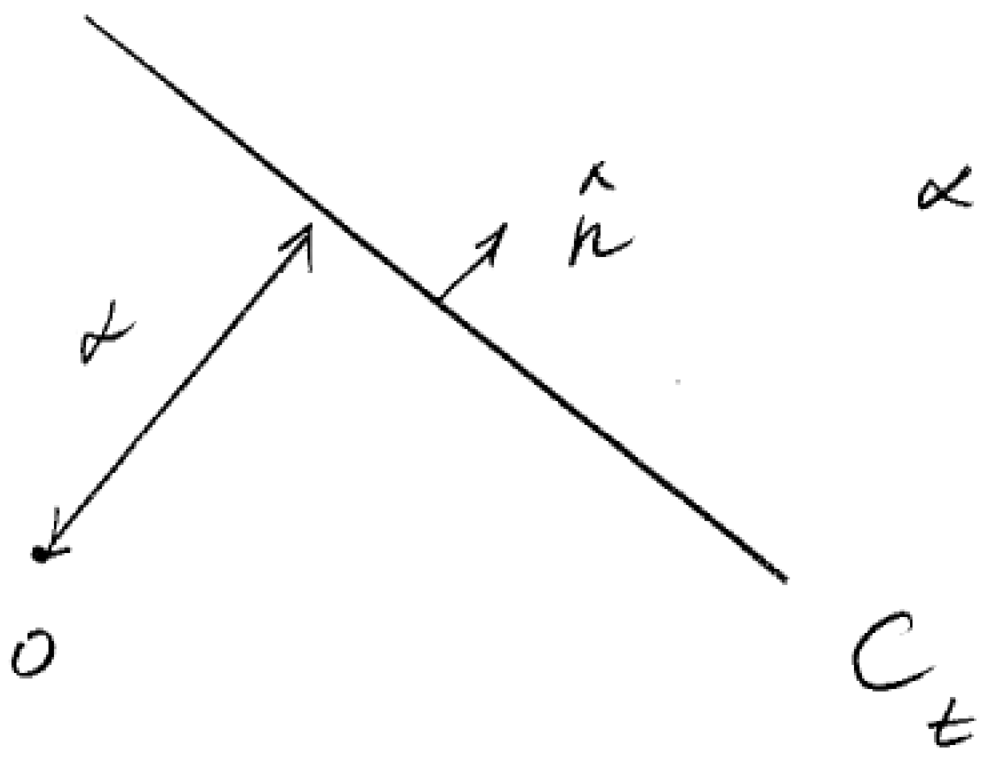
$\nu = f$ heisst Frequenz

(c) $t_{\dots}(x,t) =$ const erfüllt auf der <u>Phasenebene</u> C_t : $\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t = c_0$

Definiere norm. Normalenvektor $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{k}$

$$\hat{n}\cdot\vec{x} = \frac{c_0 + \omega t}{k} := \alpha$$

(Hesse Normalform)



α = Abstand der Ebene vom Ursprung

$$\alpha = \frac{c_0 + \omega t}{k}$$ nimmt linear mit der Zeit t zu; $v = \frac{\omega}{k}$ heisst <u>Phasengeschwindigkeit</u>

(d) $f_{\dots}(\vec{x}, t) = A_{\dots}\, e^{i[\hat{n}\cdot\vec{x}\, k - \omega t + \delta_{\dots}]}$

$f_{\dots}(\vec{x} + \hat{n}\lambda, t) = f(\vec{x}, t)$ periodisch im Raum, falls $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ heisst Wellenlänge

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\hat{n}$ —"— Wellenvektor

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ —"— Wellenzahl

(e) Die Feldgleichungen haben häufig mehrere Lösungen (Gleichungen überbestimmt)

<u>$\omega = \omega_\nu(\vec{k})$ Dispersionsrelation</u>

$\nu = 1, \dots, r$ Wellentyp

(f) <u>Gruppengeschwindigkeit</u>

$$\vec{v}_\nu(\vec{k}) := \frac{\partial \omega_\nu}{\partial \vec{k}}$$

Beispiele

1. Schrödingergleichung für Skalarfeld ψ

$$\boxed{i\,\partial_t \psi(\vec{x},t) = -\kappa\,\Delta\,\psi(\vec{x},t)}$$

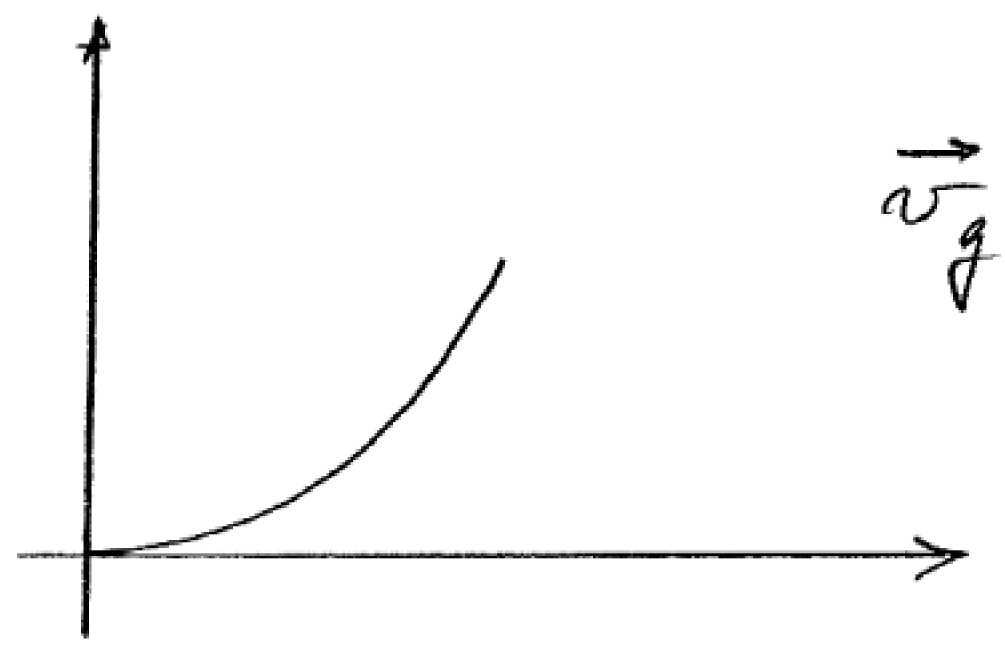
$$\psi = \psi_0\, e^{i\varphi}\ ;\quad \varphi = \vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t$$

$$M = 1,\quad N = 1$$

$$i(-i\omega)\,\psi_0 = -\kappa\,(i\vec{k})^2\,\psi_0$$

$$[\omega - \kappa k^2]\,\psi_0 = 0$$

$$\boxed{\omega = \kappa k^2}$$ Dispersionsrelation



$$\vec{v}_g = \frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}} = 2\kappa\,\vec{k}$$

2. Wellengleichung für Skalarfeld ψ

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\psi = 0}\ ;\quad \psi = \psi_0\, e^{i\varphi}$$

$$\left(\frac{1}{c^2}(-i\omega)^2 - (i\vec{k})^2\right)\psi_0 = 0$$

$$[\omega^2 - c^2k^2]\,\psi_0 = 0$$

$$\boxed{\omega = ck}$$

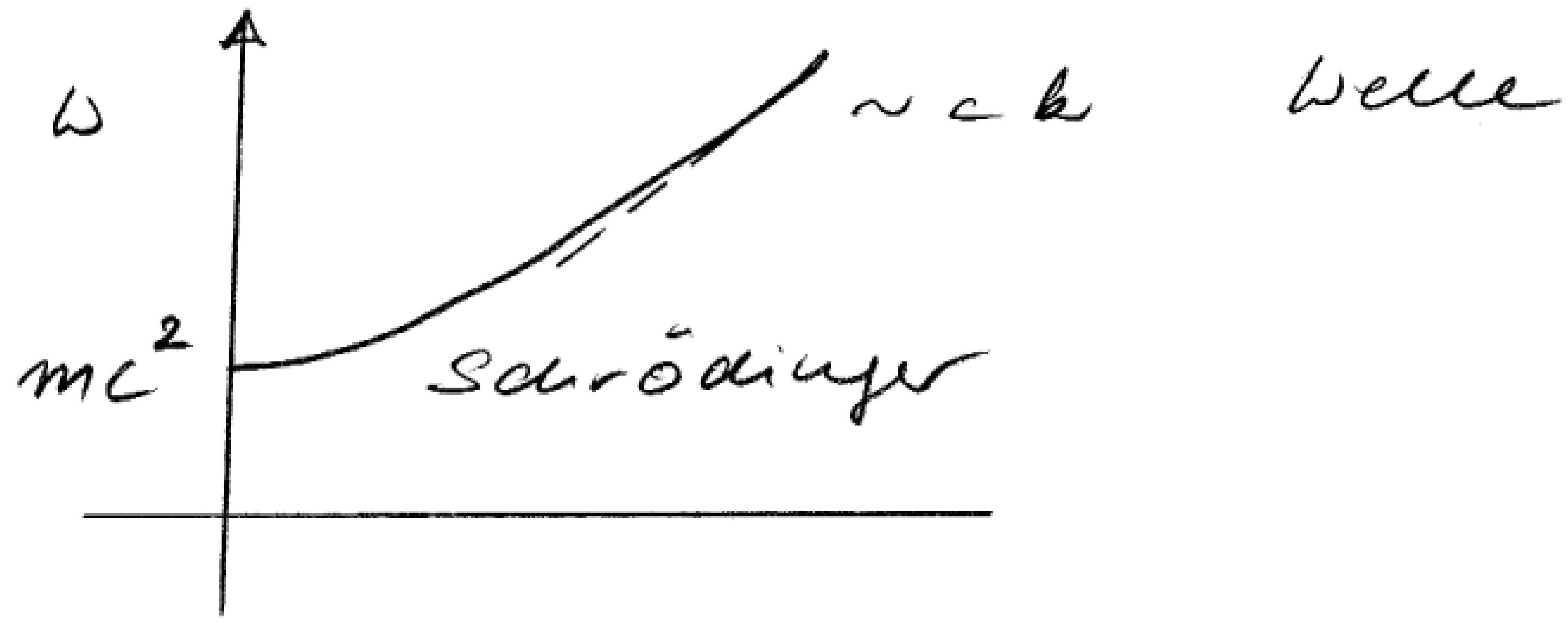
c = Wellengeschwindigkeit
(Phasengeschw. = Gruppengeschw.)

3) Klein Gordon Gleichung

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2}\partial_t^2 - \Delta + m^2c^2\right)\psi = 0}$$

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + m^2c^2\right)\psi_0 = 0$$

$$\omega = c\sqrt{k^2+m^2c^2}$$



4) Dirac Gleichung

$$i\frac{\mathbb{1}}{c}\partial_t\psi = \left(\frac{1}{i}\vec{\alpha}\cdot\vec{\nabla} + \beta mc\right)\psi$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ Matrizen, $\mathbb{1}$ Einheitsmatrix

mit $\{\alpha_i, \alpha_k\} = 0$, $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

und $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ (Einheitsmatrix)

$$\left(\mathbb{1}\frac{1}{c}i(-i\omega) - \frac{1}{i}\vec{\alpha}(i\vec{k}) - \beta mc\right)\psi_0 = 0$$

$$\curvearrowright \mathbb{1}\frac{\omega}{c} = \vec{\alpha}\cdot\vec{k} + \beta mc$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = (\alpha_i k_i + \beta mc)(\alpha_l k_l + \beta mc)$$

$$= \underbrace{\alpha_i\alpha_l k_i k_l}_{\vec{k}^2} + \underbrace{\{\alpha_i, \beta\}}_{=0} k_i + \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\beta^2} m^2c^2$$

$$= k^2 + m^2c^2 \rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2c^2 + m^2c^4}$$

$\{A, B\} = AB + BA$ Anti-Kommutator

4.4. Elektrom. Wellen im idealen Dielektrikum

- $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$

  d.h. die $\vec{B}$-Felder sind transversal zum Wellenvektor $\vec{k}$: $\quad \vec{k} \perp \vec{B}_0$

- $\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 0 \quad \rightsquigarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$

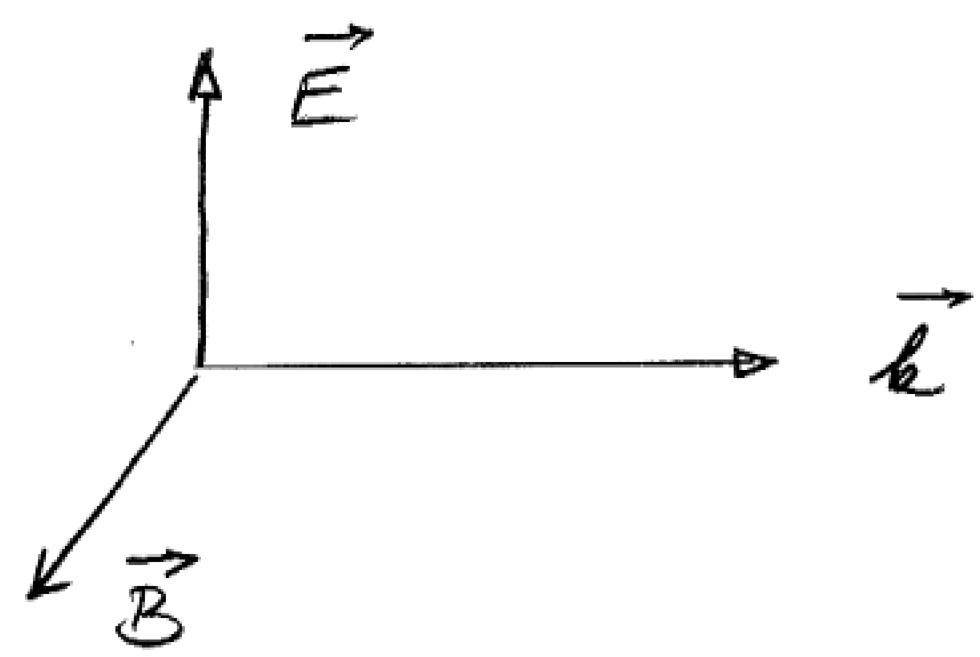
  d.h. auch die $\vec{E}$-Felder sind transversal

  $\vec{k} \perp \vec{E}_0$

- $\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = - \operatorname{rot} \vec{E} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{-i\omega}{c} \vec{B}_0 = - (i\vec{k}) \times \vec{E}_0$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{B}_0 = \left(\frac{c}{\omega}\right) \vec{k} \times \vec{E}_0$$

$$|\vec{B}_0| = \frac{ck}{\omega} |\vec{E}_0|$$



$\{\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}\}$ ist ein rechtsorientiertes 3Bein.

- $\frac{1}{c} \partial_t \vec{D} = \operatorname{rot} \vec{H}$

$$\rightsquigarrow \quad -i\omega \frac{1}{c} \varepsilon \vec{E}_0 = i \vec{k} \times \vec{B}_0 \frac{1}{\mu}$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{E}_0 = - \frac{c}{\mu\varepsilon} \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0$$

$$|\vec{E}_0| = \frac{ck}{\mu\varepsilon\omega} |\vec{B}_0|$$

$$\underset{\text{siehe oben}}{=} \frac{ck}{\mu\varepsilon\omega} \cdot \frac{ck}{\omega} \vec{E}_0$$

Folgerung: $\omega = v k$ lineare Dispersion

mit $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

Sowohl $\vec{E}$ wie $\vec{B}$ genügen einer Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{v^2}\partial_t^2 - \Delta\right)\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{pmatrix} = 0$$

Zusammenfassung: Ebene monochromatische Wellen lösen die Maxwellgleichungen

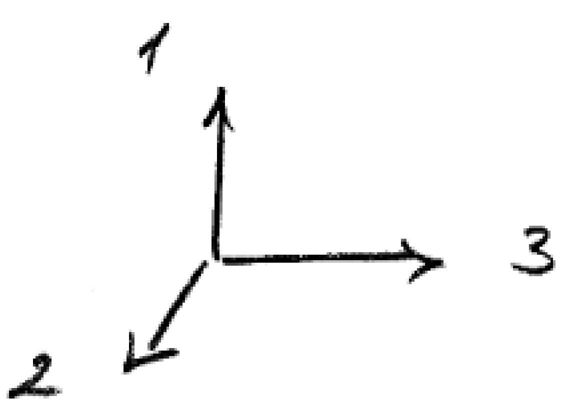
(a) $(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k})$ rechtsorient. Dreibein

(b) $\omega = v k$; $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

(c) $B_0 = \sqrt{\varepsilon\mu}\, E_0$ $\quad (\varepsilon = \mu = 1$ im Vakuum$)$

Damit hat c die Bedeutung der Geschw. der Maxwell-Wellen im Vakuum. Die Wellen sind eindeutig gegeben durch $\vec{E}_0$, wobei $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$

Lege nun $\vec{k}$ in die 3-Richtung



$\left\{ e_1, e_2, \frac{\vec{k}}{k} \right\}$ kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{E}_0 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 \,, \quad a_\ell = A_\ell\, e^{i\delta_\ell}$$

$$\rightsquigarrow \vec{E} = A_1 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \delta_1)\,\vec{e}_1 + A_2 \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \delta_2)\,\vec{e}_2$$

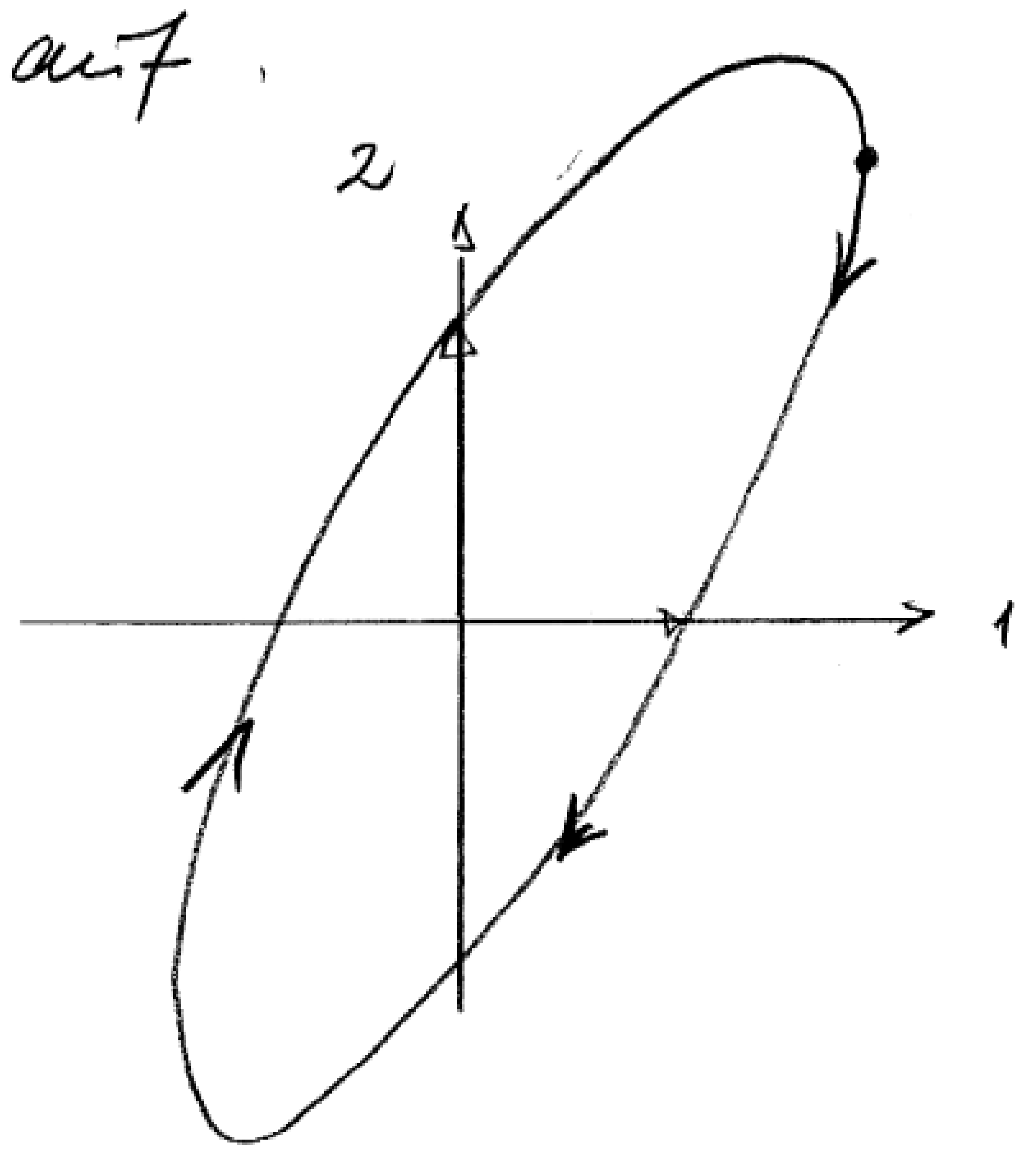
ist der Realteil von $\vec{E}_0 \exp[i\varphi(\vec{x},t)]$.

$\vec{E}$ läuft auf einer Ellipse mit der Kreisfrequenz ω. Sie heisst elliptisch polarisiert (allgemeiner Fall).

Im Spezialfall $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ gilt

$$\vec{E} = \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t + \delta) \underbrace{[A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2]}_{= \vec{A}}$$

Man spricht von einer linear polarisierten Welle. $\vec{A}$ und $\vec{k}$ spannen die Polarisationsebene auf.



Zu jedem $\vec{k}$ gibt es 2 linear unabhängige linear polarisierte Wellen, die allgemeine Welle ist eine Superposition von 2 linear polarisierten Wellen.

Die Ellipse wird zum Kreis, wenn $\delta_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$

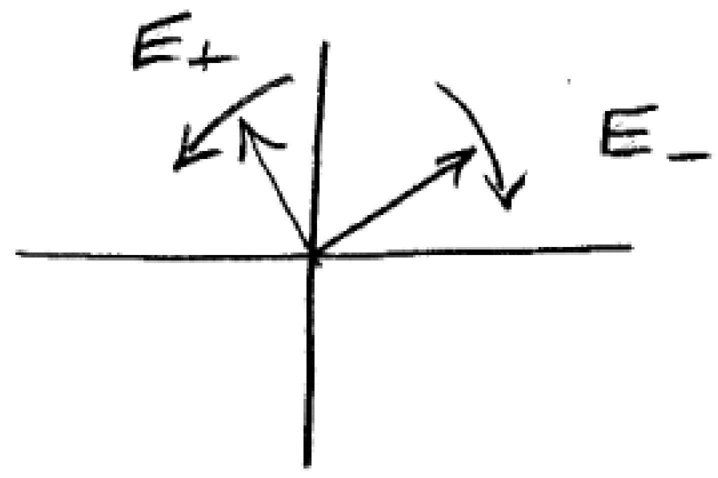
$A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\pm$

$\vec{E}_\pm = a_\pm \exp(i(\vec{k}\,\vec{x} - \omega t + \delta_1))\, \vec{e}_\pm$

$\vec{e}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i\, \vec{e}_2)$

$$\vec{E}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} a_\pm \left[\cos\varphi(x,t)\, \vec{e}_1 + \sin\varphi(x,t)\, \vec{e}_2 \right]$$

heißen rechts / links zirkular polarisierte Welle



Man kann eine ebene monochromatische Welle auch als Superposition von zwei zirkular polarisierten Wellen schreiben.