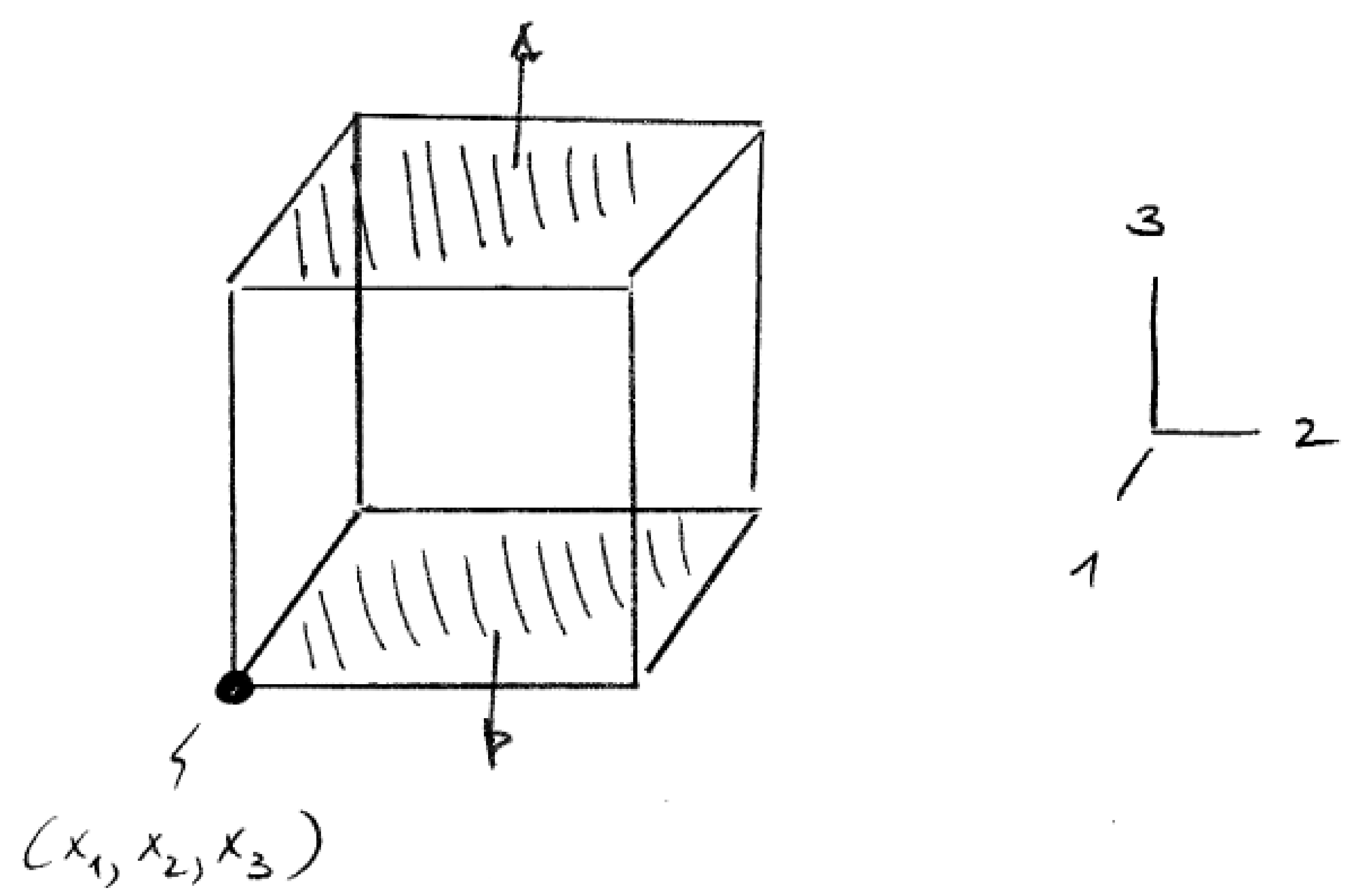
d) Der Gauß'sche Satz und Divergenz

Wir definieren nun die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluß durch die geschlossene Oberfläche ΔF eines infinitesimalen Volumenelements ΔV

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta F} \vec{E} \cdot d\vec{f}}$$

Betrachte nun einen Quader



Dann gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \Big[\big(E_3(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - E_3(x_1, x_1, x_3) \big) \cdot \Delta x_1 \Delta_2 + \text{zykl. Permutationen} \Big]$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

Gleichzeitig haben wir auch für ein infinitesimales Volumenelement gezeigt, daß gilt

$$\boxed{\oint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \oint_{F=\partial V} \vec{E}\cdot d\vec{f}}$$

Analog zum Satz von Stokes läßt sich diese Aussage unmittelbar auf endliche Volumenelemente erweitern: Gauß'scher Satz.

Korrolare: Integralsätze von Green

Für zwei Funktionen ϕ und ψ gilt nach der Produktregel

$$\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \phi\,\Delta\psi \qquad \oplus$$

$$\rightsquigarrow \quad \vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) - \vec{\nabla}(\psi\cdot\vec{\nabla}\phi) = \phi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\phi \qquad (*)$$

Integriert man $(*)$ über V so folgt aus dem Gauß'schen Satz

$$\boxed{\oint_V dV(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi) = \oint_F d\vec{f}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi)}$$

(1. Greenscher Satz)

Entsprechend findet man aus $\oplus$

$$\boxed{\int_V dV(\phi\Delta\psi) = -\int_V dV\,\vec{\nabla}\phi\cdot\vec{\nabla}\psi + \int_F d\vec{f}\,\phi\,\vec{\nabla}\psi}$$

(2. Greenscher Satz)

Korollar: $\boxed{\operatorname{div}\vec{B} = 0 \iff \exists\, \vec{A} : \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}}$

$\vec{A}$ eindeutig bis auf $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$

Beweis: $\Leftarrow$ trivial durch Nachrechnen.

$\Rightarrow$: Aus dem Satz von Gauß folgt aus $\operatorname{div}\vec{B} = 0$

$$\oint_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{für eine geschlossene Fläche } F$$

$$\Rightarrow \int_{F_1} d\vec{f}_1\, \vec{B} = \int_{F_2} d\vec{f}_2\, \vec{B} \quad \text{mit } d\vec{f}_{1,2} = \pm d\vec{f}$$

Der Fluß $\phi_C = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B}$ durch eine Fläche F, die von der Kurve C berandet ist, hängt nicht von der Form von F ab. Daher kann man diesen Fluß auch als ein Kurvenintegral entlang des Randes mit einem neuen Vektorpotential $\vec{A}$ schreiben $\phi_C = \oint_C d\vec{\ell} \cdot \vec{A}$. Mit dem Satz von Stokes folgt dann sofort

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

Wegen $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Lambda = 0$ ist diese Zuordnung nur bis auf $\vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ (Eichtrafo) eindeutig.

1.2.2. Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Man kann Vektorfelder $\vec{F}$ <u>eindeutig</u> aus ihren Quellen bestimmen

$$\boxed{\begin{array}{llll} \operatorname{div} \vec{F} = \rho(\vec{x}) & \text{Quellen} & & \\ \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\omega}(\vec{x}) & \text{Wirbel} & & (*) \end{array}}$$

wenn auf dem Rand ∂V des (einfach zusammenhängenden) Gebietes V die Normalkomponente F_n oder die Tangentialkomponente $\vec{F}_t$ vorgegeben sind.

<u>Beweis</u>: Annahme es gibt zwei unterschiedliche Lösungen $\vec{F}$ und $\vec{F}'$, dann löst $\delta\vec{F} = \vec{F} - \vec{F}'$ das Randwertproblem

$\operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$, $\operatorname{rot} \delta\vec{F} = 0$

auf ∂V: $\delta F_n = 0$ oder $\delta\vec{F}_t = 0$.

Aus $\operatorname{rot} \delta\vec{F} = 0$ folgt $\delta\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$ und mit $\operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$ genügt ϕ dann der Laplace Gleichung: $\Delta\phi = 0$.

Wähle nun $\phi = \psi$ im 2. Greenschen Satz

$$\int_V dV (\vec{\nabla}\phi)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f}\, \phi\, \vec{\nabla}\phi = -\int_{\partial V} d\vec{f}\, \phi\, \delta\vec{F}$$

$$= \int_{\partial V} df\, \phi\, \delta F_n$$

Falls $\delta F_n = 0$ ist die rechte Seite $= 0$.
Falls $\delta\vec{F}_t = 0$ dann ist ϕ entlang ∂V konstant $\rightsquigarrow$ r.S. $= -\phi \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \delta\vec{F} \overset{\text{Gauss}}{=}$
$= -\phi \int_V dV \operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$.

Damit gilt insgesamt für beliebiges V

$$\int_V dV (\delta \vec{F})^2 = 0 \curvearrowright \delta\vec{F} = 0 .$$

Folglich ist die Lösung des RW-Problems eindeutig.

Der Eindeutigkeitssatz gilt auch für unendliche Gebiete, wenn die Felder $\vec{F}$ hinreichend schnell abfallen.

$$\vec{F} \sim r^{-\alpha} \curvearrowright \vec{\nabla}\phi \sim r^{-\alpha} \curvearrowright \phi \sim r^{-\alpha+1}$$

$$\text{r.S.} \sim \int d\Omega\, r^2\, r^{-2\alpha+1} \longrightarrow 0$$

falls $-2\alpha + 3 < 0$ also $\alpha > \frac{3}{2}$.

Sind Quellen und Wirbel in einem Raumgebiet vorgegeben, so fallen die Felder für $r \to \infty$ wie das Coulombfeld $\sim r^{-2}$ ab. Dies ist hinreichend für die Eindeutigkeit der Lösung!

<u>Helmholtz'scher Hauptsatz</u>

Jedes Vektorfeld $\vec{F}$ mit ρ und $\vec{\omega} \to 0$ für $\vec{r} \to \infty$ läßt sich eindeutig in einen longitudinalen wirbelfreien Anteil $\vec{F}_\rho$ und einen transversalen quellenfreien Anteil $\vec{F}_\omega$ zerlegen

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{F} = \vec{F}_\rho + \vec{F}_\omega \\ \text{rot}\, \vec{F}_\rho = 0 \;, \quad \text{div}\, \vec{F}_\omega = 0 \end{array}}$$

$d\Omega =$ Raumwinkel

$df = r^2\, d\Omega$ für Kugel mit Radius r.

Beweis: Wähle

$$\operatorname{rot} \vec{F}_\rho = 0 \; ; \; \operatorname{div} \vec{F}_\rho = \rho \qquad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{F}_\omega = 0 \; ; \; \operatorname{rot} \vec{F}_\omega = \vec{\omega} \qquad (2)$$

Nach dem Eindeutigkeitssatz folgt die Behauptung.

Die explizite Konstruktion von $\vec{F}_\rho$ und $\vec{F}_\omega$ aus ihren Quellen nehmen wir später vor. Für unendlich ausgedehnte Gebiete gilt

$$\vec{F}_\rho = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \, \frac{\rho(\vec{x}')\,(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \, ,$$

$$\vec{F}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{x}' \, \frac{\vec{\omega}(\vec{x}') \times (\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} \, .$$

(i) Wirbelfreie Felder (Elektrostatik)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho \; ; \; \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Aus $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ folgt $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$

und damit dann

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\phi) = -\Delta\phi = 4\pi\rho$$

$$\Delta\phi = -4\pi\rho \qquad \underline{\text{Poisson-Gleichung}}$$

Die Lösung dieser Gleichung wird uns in der Elektrostatik beschäftigen.

(ii) Quellenfreie Felder (Magnetostatik)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \; , \; \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \equiv \vec{\omega}$$

Aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ folgt $\exists \vec{A}$ mit

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\curvearrowright \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} = \vec{\omega}$$

Wählt man die Eichung $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0$, so ergibt sich wieder eine Poisson-Gleichung

$$\Delta\vec{A} = -\vec{\omega}$$

Lösung der Poissongleichung

$$\boxed{\Delta\phi = -4\pi\rho}$$

Betrachte eine Punktladung im Ursprung

$$\rho(\vec{x}) = q\,\delta(\vec{x})$$

Verwende daß ϕ sphärische Symmetrie hat:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\partial_r\left(r^2\partial_r\phi\right) = 0 \quad \text{für } r > 0.$$

Die Lösung ist offensichtlich

$$\phi = \frac{c}{r} + \cancel{D}$$

irrelevant (Nullpunkt festlegen)

Berechne nun ein Volumenintegral über Kugel

$$\underbrace{\int_V dV\,\nabla^2\phi}_{} = -4\pi\int_V \rho\,dV = -4\pi q$$

$$\overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{\nabla}\phi \underset{\uparrow}{=} -\frac{c}{r^2}\,4\pi r^2 \Rightarrow c = q$$

kann Lösung für $r >$ auf ∂V verwenden; ∂V = Kugeloberfläche mit Radius r.

Folglich ist die Lösung: $\phi(\vec{x}) = \dfrac{q}{|\vec{x}|}$

Die Lösung für eine allgemeine Ladungsverteilung ergibt sich dann aus Superposition, wobei der Ursprung des Koordinatensystems nun in $\vec{x}'$ liegt

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int d^3x'\,\frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$