1. Mathematische Formulierung des Feldbegriffs

Man spricht von einem FELD, wenn jedem Raum-Zeit Punkt $(\vec{x}, t)$ eine (physikalische) Größe zugeordnet ist. Felder werden nach ihrem Transformationsverhalten klassifiziert

$\phi(\vec{x}, t)$	skalares Feld
$\vec{A}(\vec{x}, t)$; $A_i(\vec{x}, t)$; $i = 1, 2, 3$	Vektorfeld
$F_{ik}(\vec{x}, t)$; $i, k = 1, 2, 3$	Tensorfeld 2ter Stufe
$\vdots$	

Beispiele

Skalare Felder : Massendichte, Teilchendichte, Ladungsdichte, Temperatur, ...

Vektorfelder : Geschwindigkeit (Gase, Flüssigkeiten, ...), Elektromagn. Felder, Stromdichten, ...

Tensorfelder : Orientierung von Stabmolekülen oder Polymeren, elem. Feldtensor, ...

Feldtheorien:

Hydrodynamik, Elastizitätstheorie, Komplexe Flüssigkeiten, Festkörper, Elektrodynamik, Eichtheorien, ...

alle sind phänomenologisch!

1.1. Euklidische Tensorfelder

K = kartesisches Koordinatensystem $^{\phi)}$
$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ kartesische Koordinaten

Betrachte eine <u>orthogonale Transformation</u> $\mathcal{D}$ von einem Koordinatensystem K in ein anderes Koordinatensystem K'. Dann lauten die Koordinaten in K'

$$\boxed{x_i' = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{D}_{ij}\, x_j \overset{*)}{=} \mathcal{D}_{ij}\, x_j}$$

$\mathcal{D}$ ist eine <u>orthogonale Matrix</u>: $\boxed{\mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T}$, oder explizit

$$\mathcal{D}_{ij}\, \mathcal{D}_{ik} = \delta_{jk}$$
$$\mathcal{D}_{ji}\, \mathcal{D}_{ki} = \delta_{jk}$$

Dann <u>definiert</u> man:

Skalare Feld : $\phi'(x_1', x_2', x_3') := \phi(x_1, x_2, x_3)$
Vektorfeld : $A_i'(x_1', x_2', x_3') := \mathcal{D}_{ik} A_k(x_1, x_2, x_3)$
Tensorfeld : $F_{ik}'(x_1', x_2', x_3') := \mathcal{D}_{il} \mathcal{D}_{km} F_{lm}(x_1, x_2, x_3)$

wobei $\vec{x}'$ über $\vec{x}' = \mathcal{D}\vec{x}$ zu berechnen ist; <u>$\vec{x}'$ entspricht demselben Raumpunkt wie $\vec{x}$.</u>
Man unterscheidet

$$\det \mathcal{D} = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche Drehungen} \\ -1 & \text{uneig. orth. Transformationen (z.B. Spiegelungen)} \end{cases}$$

---

*) Einstein'sche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert

ϕ) Euklidische Metrik $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
$\hat{e}_i$: $i = 1,2,3$ Basisvektoren

Felder heissen pseudo-skalar, pseudo-vektoriell usw., falls

$$\phi'(x_1', x_2', x_3') = \operatorname{Det} D \; \phi(x_1, x_2, x_3)$$

Spezielle (und häufig verwendete) Tensoren:

(a) Spur eines Tensors 2ter Stufe (Verjüngung)

$$f = \sum_i F_{ii} = F_{ii} \quad \text{ist ein Skalar}$$

(b) Alternierender Tensor 2ter Stufe

$$t_{ij} = -t_{ji}, \quad \text{d.h.} \quad \begin{pmatrix} 0 & t_3 & -t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 & -t_1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{anti-symm. Matrix}$$

Man kann einem alternierenden Tensor 2ter Stufe einen Pseudo-vektor zuordnen. Diesen Isomorphismus nennt man „Hodge-Dualität"

$$t_{ij} \leftrightarrow t_i$$

Definiere das Levi-Civita Symbol durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{falls 2 Indizes gleich} \\ +1 & \text{gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{ungerade} \quad -\text{"}- \end{cases}$$

Damit kann man den Zusammenhang zwischen t_{ij} und t_i schreiben als

$$t_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \, t_{jk}$$

$$t_{ij} = \varepsilon_{ijk} \, t_k$$

(Prüfe durch explizites Nachrechnen)

(c) t_{ijk} heißt alternierender Tensor 3. Stufe falls

$$t_{ijk} = + t_{P(ijk)} \quad \text{für } P \text{ gerade Perm.}$$
$$= - t_{P(ijk)} \quad \text{-"- ungerade Perm.}$$

Das Levi-Civita Symbol ist ein alternierender Tensor 3ter Stufe. Prüfe dazu die Transformationseigenschaften

$$\varepsilon'_{ijk} = D_{il} D_{jm} D_{kn} \varepsilon_{lmn}$$

$$= (\operatorname{Det} D)\, \varepsilon_{ijk}$$

(einfach aufgrund der Definition der Determinante)

Folglich ist ε_{ijk} ein Pseudo-Tensor.

(d) Gegeben die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Dann ist

$$t_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$$

ein schief sym. Tensor 2ter Stufe

$t_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2$ usw $\quad (\vec{t} = \vec{a} \times \vec{b})$

ist ein Pseudovektor

$$t_i = \varepsilon_{ijk}\, a_j b_k$$

(Pseudotensor 3ter Stufe verjüngt mit 2 Vektoren ergibt einen Pseudo-vektor).

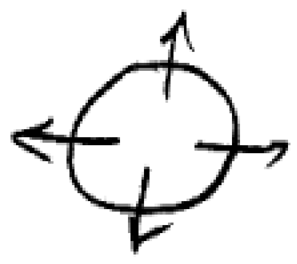
1.2. Grundbegriffe der Vektoranalysis

Was sind geeignete mathematische Größen, um die Eigenschaften von Feldern zu charakterisieren?

„Gradient" Anstieg entlang von Kurven

„Wirbel" Zirkulation von Vektorfeldern entlang von Kurven

„Divergenz" Fluß durch eine geschlossene Fläche



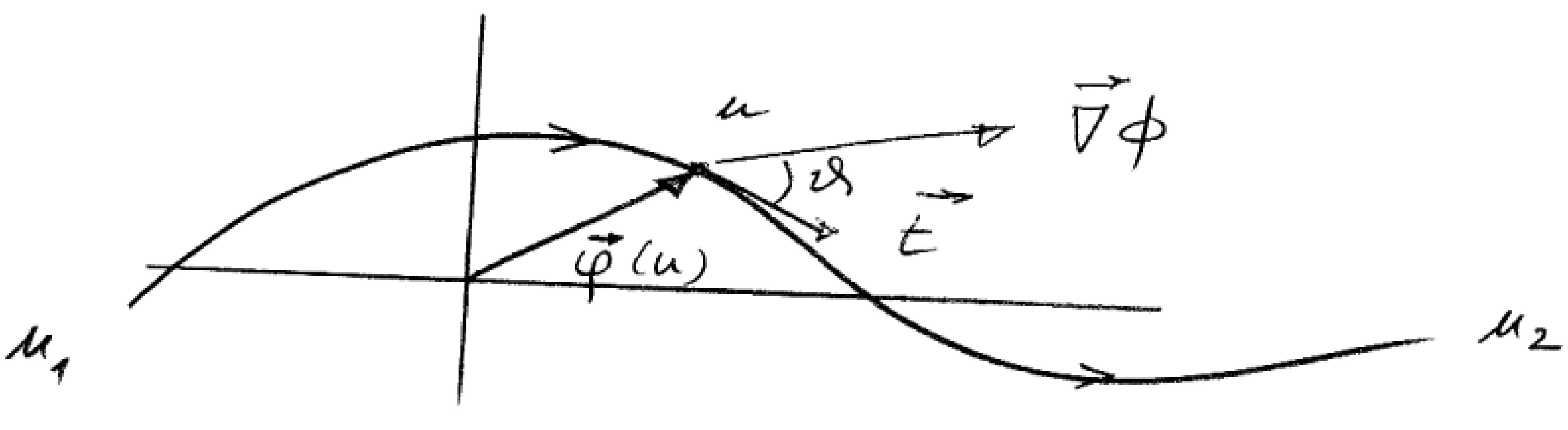
Ziel: mathematische Definition dieser „anschaulichen" Begriffe und vollständige Charakterisierung von Tensorfeldern

1.2.1. Gradient, Rotation und Divergenz

(a) Gradienten und Wegintegrale

Betrachten eine Raumkurve in Parameterdarstellung

$$C: \quad \vec{x} = \vec{\varphi}(u) \quad ; \quad u_1 \le u \le u_2$$



Tangente $\vec{t} := \dfrac{d\vec{\varphi}(u)}{du}$

Parametrisiert man die Kurve um, $u = u(\tilde{u})$ mit $du/d\tilde{u} > 0$, so findet man

$$\tilde{\vec{t}} = \frac{d\vec{\varphi}}{d\tilde{u}} = \frac{d\vec{\varphi}}{du}\frac{du}{d\tilde{u}} = \vec{t}\cdot\frac{du}{d\tilde{u}}$$

d.h. $\tilde{\vec{t}}\,d\tilde{u} = \vec{t}\,du$ bleibt invariant. Wir definieren nun die Bogenlänge l als

$$l = \int_0^l dl = \int_{u_1}^{u} |\vec{t}|\,du$$

Es gibt dann $\vec{t}_0 = d\vec{\varphi}/dl$ mit $|\vec{t}_0| = 1$.
Diese Parametrisierung in der Bogenlänge heisst auch die natürliche Parametrisierung einer Raumkurve C.

<u>Richtungsableitung einer skalaren Funktion</u>

= Anwachsen eines skalaren Potentials $\phi(\vec{x})$ entlang einer Raumkurve $\vec{\varphi}(l)$

$$\frac{d\phi}{dl} = \frac{d}{dl}\phi(\vec{\varphi}(l)) = \sum_i \partial_i \phi\big|_{\vec{\varphi}(l)} \cdot \frac{d\varphi_i}{dl}$$

$$= \vec{t}_0 \cdot \vec{\nabla}\phi\big|_{\vec{\varphi}(l)} = |\vec{\nabla}\phi|\cos\vartheta$$

Folglich zeigt $\vec{\nabla}\phi$ in die Richtung des <u>stärksten Anstiegs</u> von ϕ $\rightarrow$ <u>Gradient.</u>

$\vec{\nabla}$ Nabla Operator (Gradient) = grad

$$\vec{\nabla}\phi \equiv \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}, \frac{\partial\phi}{\partial x_3}\right) \equiv (\partial_1\phi, \partial_2\phi, \partial_3\phi)$$

$$\equiv \operatorname{grad}\phi.$$

Sei nun $\vec{E}$ ein Vektorfeld. Dann versteht man unter einem Wegintegral

$$\int_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_C \vec{E}\cdot\vec{t}\,du$$

(unabhängig von der Wahl der Parametrisierung!)

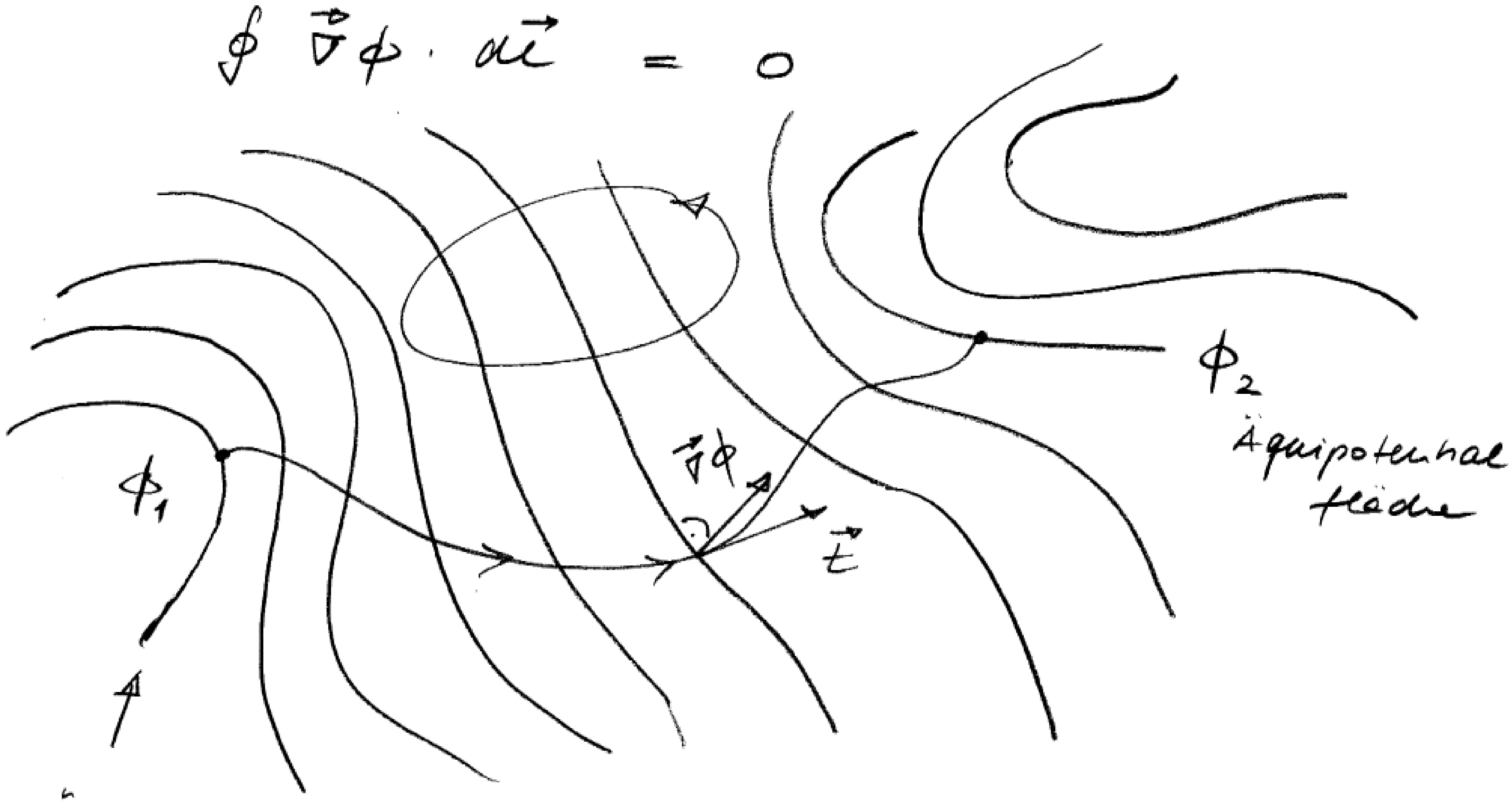
Konservative Felder lassen sich (per Def.) als Gradienten eines skalaren Potentials schreiben $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Dann gilt

$$\int_C \vec{\nabla}\phi\, d\vec{l} = \int_{u_1}^{u_2} \vec{\nabla}\phi\cdot\vec{t}\,du = \int_{\vec{\varphi}(u_1)=\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}(u_2)=\vec{\varphi}_2} d\phi$$

$$= \phi(\vec{\varphi}_2) - \phi(\vec{\varphi}_1)$$

Insbesondere folgt dann, daß Wegintegrale konservativer Felder entlang geschlossener Kurven verschwinden

$$\oint \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{l} = 0$$



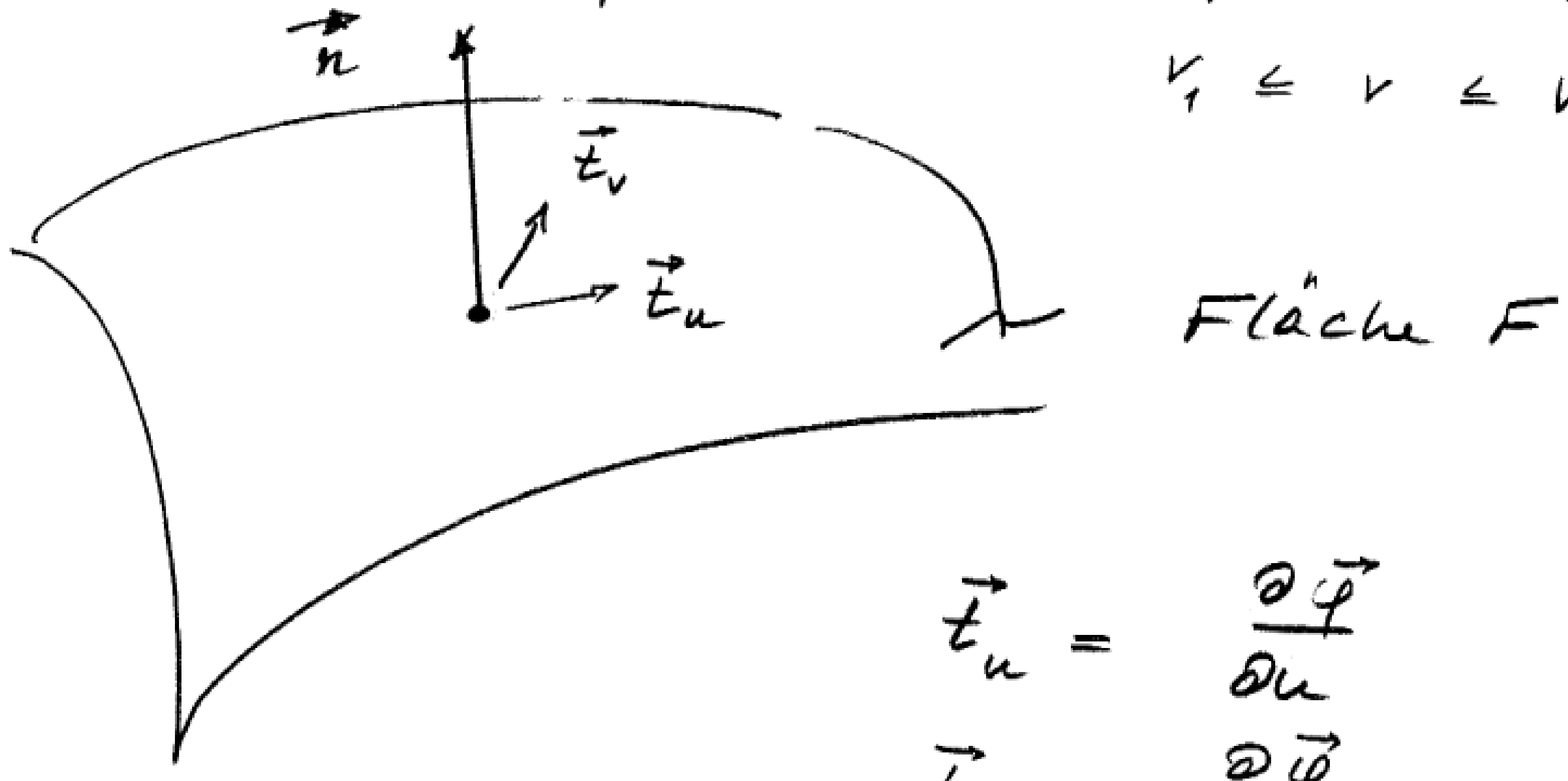
Äquipotentialfläche ϕ_1

Gradient $\perp$ Äquipotentialfläche

$\nearrow$ stärkster Anstieg

b) Flächenintegrale

$$F: \quad \vec{x} = \vec{\varphi}(u,v) \qquad u_1 \le u \le u_2, \quad v_1 \le v \le v_2$$



$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}$$
$$\vec{t}_v = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$$

$(\vec{t}_u, \vec{t}_v)$ linear unabh. Vektoren, die Tangentialfläche am Punkt (u,v) aufspannen.

Normalvektor: $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$

$|\vec{n}|$ Fläche des Parallelogramms $(\vec{t}_u, \vec{t}_v)$

Flächenintegral: $$|F| = \iint |\vec{n}|\, du\, dv \equiv \int_F |d\vec{f}|$$

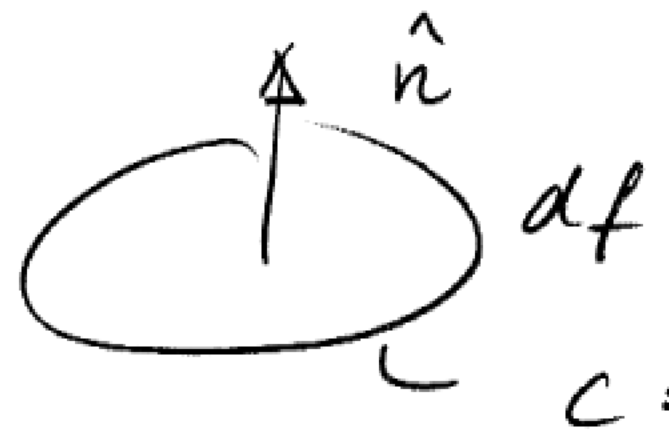
Sei nun $\vec{B}$ ein Vektorfeld. Dann nennt man

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, du\, dv$$

den Fluß von $\vec{B}$ durch die orientierte Fläche F.

c) <u>Rotation und Satz von Stokes</u>

Wir betrachten ein infinitesimales Oberflächen-element df mit Richtung $\hat{n}$



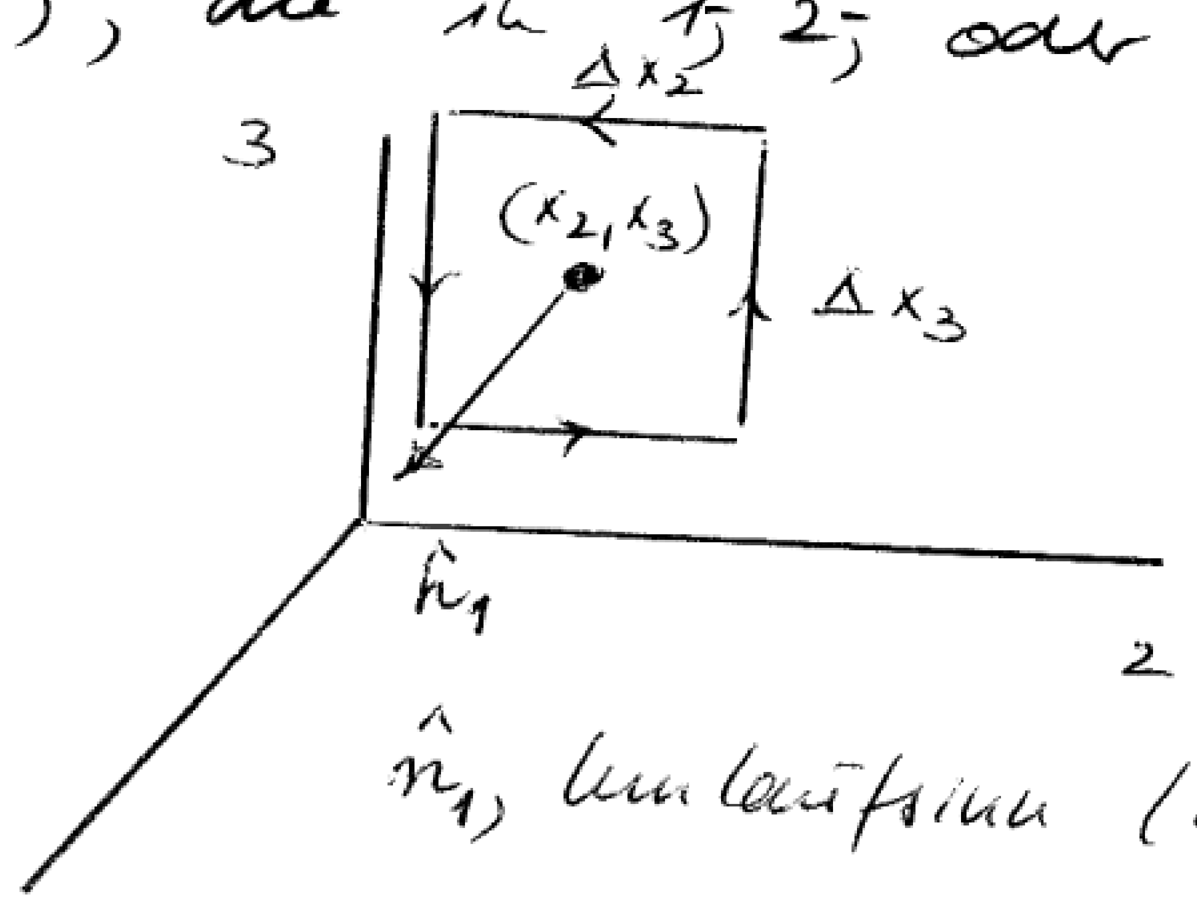
$c = \partial(df)$ Rand von $d\vec{f}$

Dann wird durch

$$\boxed{\hat{n}\cdot \operatorname{rot}\vec{E} := \lim_{df\to 0} \frac{1}{df}\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

die Rotation des Vektorfeldes $\vec{E}$ definiert. Die Komponente der Rotation von $\vec{E}$ entlang der Richtung eines beliebig gewählten (gerichteten) Oberflächenelementes ist gleich der <u>Zirkulation</u> $(\oint \vec{E}\cdot d\vec{l})$ auf der Berandung c von $d\vec{f}$. Dies ist eine mathematische Quantifizierung des Wirbelbegriffs. Die <u>Richtung von $\operatorname{rot}\vec{E}$</u> gibt die Richtung <u>maximaler Zirkulation</u> des Vektorfeldes $\vec{E}$ an.

Betrachte nun eine spezielle Fläche (Quadrat), die in 1, 2, oder 3-Richtung zeigt



$\hat{n}_1$, Umlaufsinn (rechte Hand)

Berechne das Kurvenintegral (Zirkulation)

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{x_2-\frac{1}{2}\Delta x_2}^{x_2+\frac{1}{2}\Delta x_2} dx_2 \left[E_2(x_1, x_2, x_3 - \tfrac{1}{2}\Delta x_3) - E_2(x_1, x_2, x_3 + \tfrac{1}{2}\Delta x_3) \right]$$

$$+ \int_{x_3-\frac{1}{2}\Delta x_3}^{x_3+\frac{1}{2}\Delta x_3} dx_3 \left[E_3(x_1, x_2 + \tfrac{1}{2}\Delta x_2, x_3) - E_3(x_1, x_2 - \tfrac{1}{2}\Delta x_2, x_3) \right]$$

$$\overset{\text{Taylor}}{=} \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 \left(\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 \right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{n}_1 \cdot \mathrm{rot}\, \vec{E}}_{(\mathrm{rot}\,\vec{E})_1} = \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2$$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zykl. Permutation der Indizes (1, 2, 3)

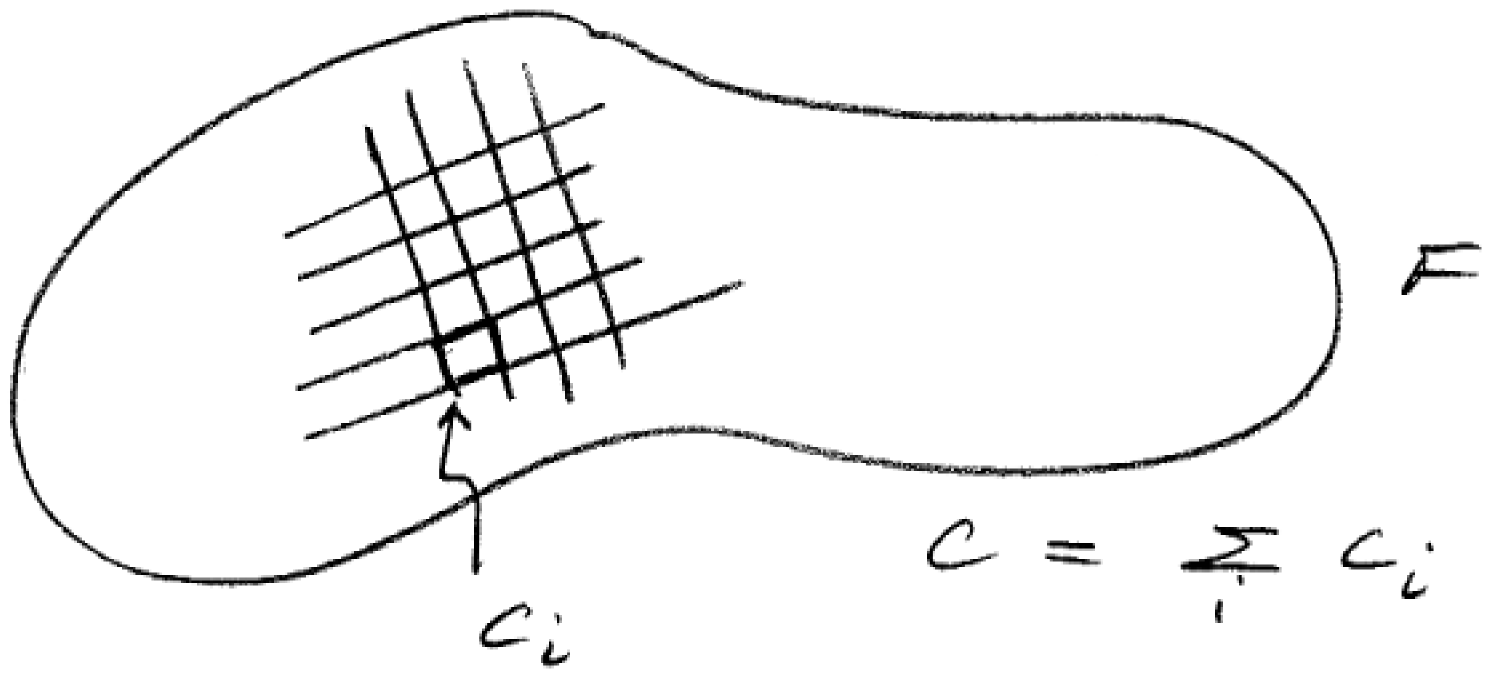
$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{rot}\, \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

Gleichzeitig haben wir gezeigt, daß für ein infinitesimales Oberflächenelement gilt

$$\int_{df} \mathrm{rot}\, \vec{E}\ \vec{n}\, df = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Dies läßt sich unmittelbar auf endliche Flächen verallgemeinern, wenn man diese aus infinitesimalen Elementen zusammensetzt. Es gilt nämlich $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

da sich benachbarte Linienintegrale kürzen.



Damit ergibt sich dann der Satz von Stokes

$$\boxed{\int_F \mathrm{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}}$$

Korrolar: $\boxed{\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \iff \exists\,\phi:\ \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi}$

Beweis: $\Leftarrow$: trivial durch Nachrechnen

$\Rightarrow$: Nach dem Satz von Stokes folgt $\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$. Folglich ist die Größe

$$\phi := -\int_0^P \vec{E}\cdot d\vec{l}$$ wegunabhängig.

Bei festgehaltenem Anfangspunkt 0 hängt ϕ nur vom Endpunkt P ab: $\phi(\vec{r})$

$\curvearrowright\ d\phi \overset{*)}{=} \vec{\nabla}\phi\cdot d\vec{l} \overset{**)}{=} -\vec{E}\cdot d\vec{l}$

Da $d\vec{l}$ beliebig $\rightsquigarrow$ $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$.

*) Definition der Richtungsableitung.

**) $\phi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{l}$.

$\curvearrowright$ konservativ $\iff$ wirbelfrei