

1. Mathematische Formulierung des Feldbegriffs.

Man spricht von einem FELD, wenn jedem Raum-Zeit Punkt (\vec{x}, t) eine (physikalische) Größe zugeordnet ist. Felder werden nach ihrem Transformationsverhalten klassifiziert

$\phi(\vec{x}, t)$	skalares Feld
$\vec{A}(\vec{x}, t) : A_i(\vec{x}, t); i = 1, 2, 3$	Vektorfeld
$F_{ik}(\vec{x}, t); i, k = 1, 2, 3$	Tensorfeld 2.ter Stufe
\vdots	

Beispiele

Skalare Felder :	Massendichte, Teilchendichte, Ladungsdichte, Temperatur, ...
Vektorfelder :	Geschwindigkeit (Gas, Flüssigkeiten, ...), Elektromagn. Felder, Stromdichten, ...
Tensorfelder :	Orientierung von Stabmolekülen oder Polymeren, elem. Feldtensor, ...

Feldtheorien:

Hydrodynamik, Elastizitätstheorie,
Komplexe Flüssigkeiten, Festkörper,
Elektrodynamik, Eichtheorien, ...

alle sind phänomenologisch!

1.1. Euklidische Tensorfelder

$K =$ kartesisches Koordinatensystem \dagger

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ kartesische Koordinaten

Betrachte eine orthogonale Transformation
 D von einem Koordinatensystem K zu ein
anderem Koordinatensystem K' . Dann lauten
die Koordinaten in K'

$$x'_j = \sum_{j=1}^3 D_{ij} x_j = D_{ij} x_j \quad *)$$

D ist eine orthogonale Matrix: $D^{-1} = D^T$,
oder explizit

$$D_{ij} D_{ik} = \delta_{jk}$$

$$D_{ji} D_{ki} = \delta_{jk}$$

Dann definiert man:

Skalare Feld: $\phi'(x'_1, x'_2, x'_3) := \phi(x_1, x_2, x_3)$

Vektorfeld: $A'_i(x'_1, x'_2, x'_3) := D_{ik} A_k(x_1, x_2, x_3)$

Tensorfeld: $F'_{ik}(x'_1, x'_2, x'_3) := D_{il} D_{km} F_{lm}(x_1, x_2, x_3)$

wobei \vec{x}' über $\vec{x}' = D \vec{x}$ zu berechnen ist;
 \vec{x}' entspricht dem selben Punkt wie \vec{x} .

Man unterscheidet

$$\text{Det } D = \begin{cases} +1 & \text{eigentliche Drehungen} \\ -1 & \text{uneig. orth. Transformationen} \\ & \text{(z.B. Spiegelungen)} \end{cases}$$

*) Einstein'sche Summenkonvention: über doppelt auftretende Indizes wird summiert

\dagger) Euklidische Metrik $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$
 $\hat{e}_i: i = 1, 2, 3$ Basisvektoren

Felder besitzen pseudo-skalar, pseudo-vektoriell usw., falls

$$\phi'(x_1', x_2', x_3') = \text{Det } D \phi(x_1, x_2, x_3)$$

Spezielle (und häufig verwendete) Tensoren:

(a) Spur eines Tensors 2ter Stufe (Verjüngung)

$$f = \sum_i F_{ii} = F_{ii} \text{ ist ein Skalar}$$

(b) Alternierender Tensor 2ter Stufe

$$t_{ij} = -t_{ji}, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 0 & t_3 - t_2 \\ -t_3 & 0 & t_1 \\ t_2 - t_1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ anti-symm. Matrix}$$

Man kann einem alternierenden Tensor 2ter Stufe einen Pseudo-vektor zuordnen. Diesen Isomorphismus nennt man "Hodge-Dualität"

$$t_{ij} \leftrightarrow t_i$$

Definieren das Levi-Civita Symbol durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0 & \text{falls 2 Indizes gleich} \\ +1 & \text{gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{ungerade " " "} \end{cases}$$

Damit kann man die Zusammenhangsgleichung zwischen t_{ij} und t_i schreiben als

$$t_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} t_{jk}$$

$$t_{ij} = \varepsilon_{ijk} t_k$$

(Prüfe durch explizites Nachrechnen)

(c) t_{ijk} heißt alternierender Tensor 3. Stufe falls

$$\begin{aligned} t_{ijk} &= + t_{P(ijk)} && \text{für } P \text{ gerade Permut.} \\ &= - t_{P(ijk)} && \text{" " ungerade Permut.} \end{aligned}$$

Das Levi-Civita Symbol ist ein alternierender Tensor 3ter Stufe. Prüfe dazu die Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= D_{il} D_{jm} D_{kn} \epsilon_{lmn} \\ &= (\det D) \epsilon_{ijk} \end{aligned}$$

(einfach aufgrund der Definition der Determinante)

Folglich ist ϵ_{ijk} ein Pseudo-Tensor.

(d) Gegeben die Vektoren \vec{a} und \vec{b} , dann ist

$$t_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$$

ein antisym. Tensor 2ter Stufe

$$t_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \text{ usw. } (\vec{t} = \vec{a} \times \vec{b})$$

ist ein Pseudovektor

$$t_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k$$

(Pseudotensor 3ter Stufe verjüngt mit 2 Vektoren ergibt einen Pseudo-Vektor).

1.2. Grundbegriffe der Vektoranalysis

Was sind geeignete mathematische Größen, um die Eigenschaften von Feldern zu charakterisieren?

- "Gradient" Ausstieg entlang von Kurven
"Wirbel" Zirkulation von Vektorfeldern entlang von Kurven
"Divergenz" Fluß durch eine geschlossene Fläche



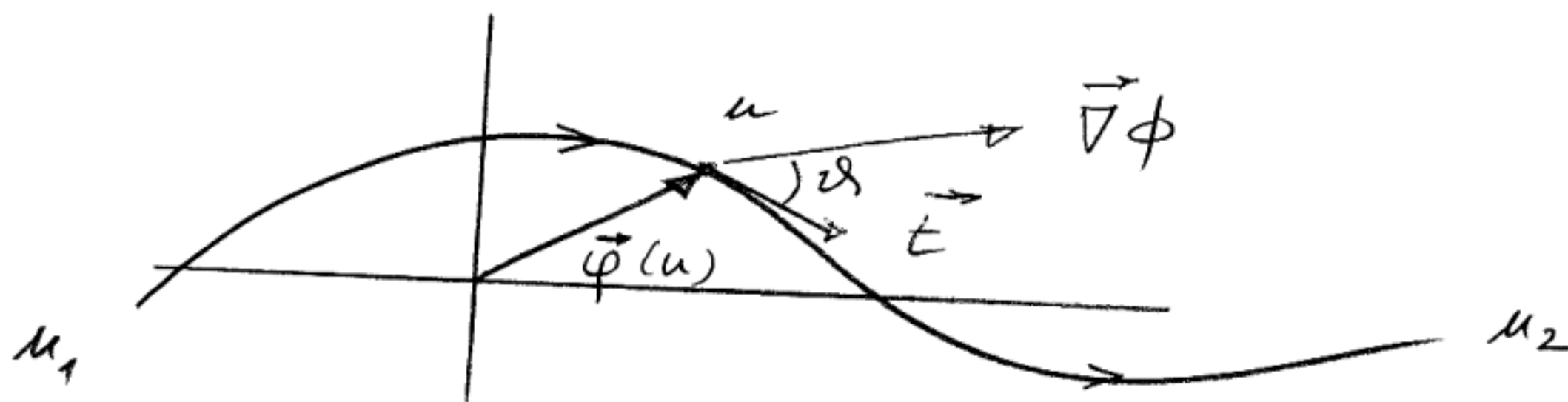
Ziel: mathematische Definition dieser "anschaulichen" Begriffe und vollständige Charakterisierung von Tensorfeldern

1.2.1. Gradient, Rotation und Divergenz

(a) Gradienten und Wegintegrale

Betrachte eine Raumkurve in Parameterdarstellung

$$C: \vec{x} = \vec{\varphi}(u) ; \quad u_1 \leq u \leq u_2$$



Tangentenvektor $\vec{t} := \frac{d\vec{\varphi}(u)}{du}$

Parametrisiert man die Kurve nun, $u = u(\tilde{u})$
mit $du/d\tilde{u} > 0$, so findet man

$$\vec{t} = \frac{d\vec{\varphi}}{d\tilde{u}} = \frac{d\vec{\varphi}}{du} \frac{du}{d\tilde{u}} = \vec{T} \cdot \frac{du}{d\tilde{u}}$$

d.h. $\vec{T} d\tilde{u} = \vec{T} du$ bleibt invariant. Wir

definieren nun die Bogenlänge l als

$$l = \int_0^u dl = \int_0^u |\vec{T}| du$$

Es gibt dann $\vec{t}_0 = d\vec{\varphi}/dl$ mit $|\vec{t}_0| = 1$.
Diese Parametrisierung nach Bogenlänge
heißt auch die natürliche Parametrisierung
einer Raumkurve C .

Richtungsableitung einer skalaren Funktion

= Anwachsen eines skalaren Potentials $\phi(\vec{x})$
entlang einer Raumkurve $\vec{\varphi}(l)$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dl} &= \frac{d}{dl} \phi(\vec{\varphi}(l)) = \sum_i \partial_i \phi|_{\vec{\varphi}(l)} \cdot \frac{d\varphi_i}{dl} \\ &= \vec{t}_0 \cdot \vec{\nabla} \phi|_{\vec{\varphi}(l)} = |\vec{\nabla} \phi| \cos \alpha \end{aligned}$$

Folglich zeigt $\vec{\nabla} \phi$ in die Richtung des
stärksten Anstiegs von ϕ \rightarrow Gradient.

$\vec{\nabla}$ Nabla Operator (Gradient) = grad

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \phi &\equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) \equiv (\partial_1 \phi, \partial_2 \phi, \partial_3 \phi) \\ &\equiv \text{grad } \phi. \end{aligned}$$

Sei nun \vec{E} ein Vektorfeld. Dann versteht man unter einem Wegintegral

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{u} = \int_C \vec{E} \cdot \vec{t} \, du$$

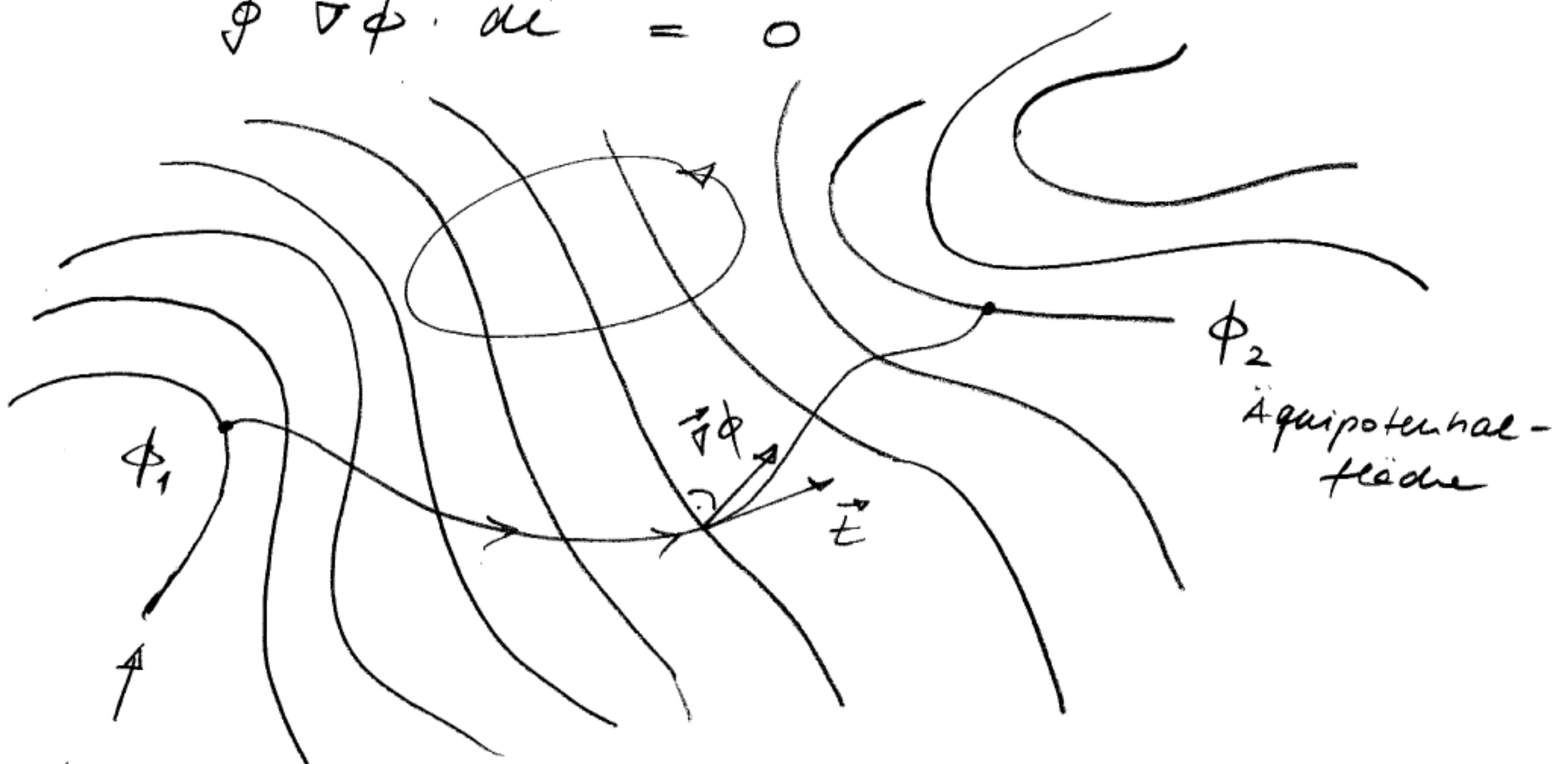
(unabhängig von der Wahl der Parametrisierung!)

Konservative Felder lassen sich (per Def.) als Gradienten eines skalaren Potentials schreiben $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_C \vec{\nabla}\phi \, d\vec{u} &= \int_{u_1}^{u_2} \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{t} \, du = \int_{\vec{\varphi}(u_1)=\vec{\varphi}_1}^{\vec{\varphi}(u_2)=\vec{\varphi}_2} d\phi \\ &= \phi(\vec{\varphi}_2) - \phi(\vec{\varphi}_1) \end{aligned}$$

Insbesondere folgt dann, daß Wegintegrale konservativer Felder entlang geschlossener Kurven verschwinden

$$\oint \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{u} = 0$$

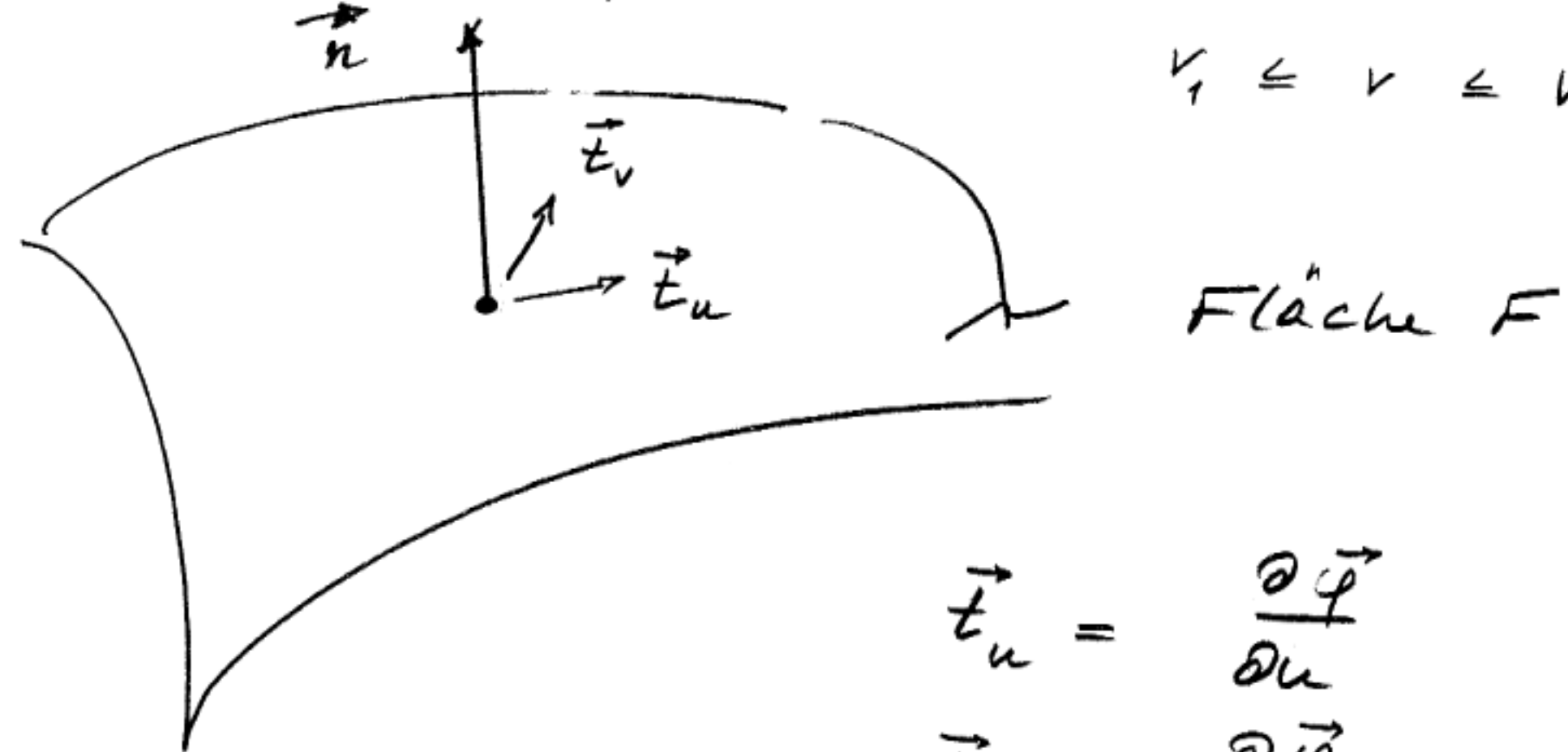


Äquipotentialfläche ϕ_1

Gradient \perp Äquipotentialfläche
 \uparrow stärkster Ausstieg

b) Flächenintegrale

$$F: \vec{x} = \vec{\varphi}(u, v) \quad u_1 \leq u \leq u_2 \\ \vec{n} \quad v_1 \leq v \leq v_2$$



$$\vec{t}_u = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \\ \vec{t}_v = \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$$

(\vec{t}_u, \vec{t}_v) linear unabh. Vektoren, die Tangentialebene am Punkt (u, v) aufspannen.

Normalvektor: $\vec{n} = \vec{t}_u \times \vec{t}_v$

$|\vec{n}|$ Fläche des Parallelogramms (\vec{t}_u, \vec{t}_v)

Flächenintegral: $|F| = \iint |\vec{n}| \, du \, dv \\ = \int_F |d\vec{f}|$

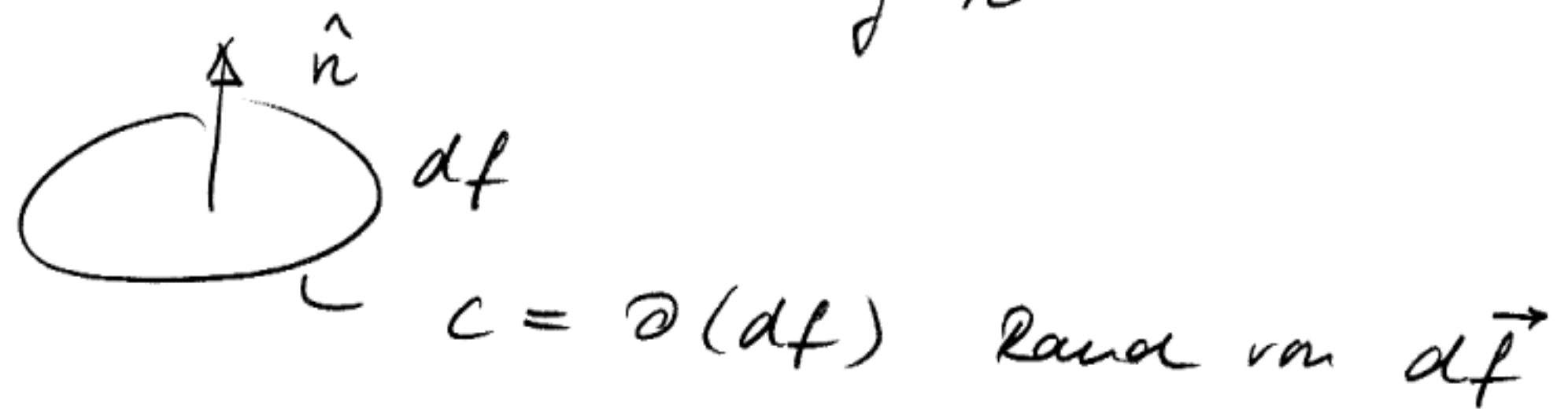
Sei nun \vec{B} ein Vektorfeld. Dann nennt man

$$\Phi = \int_F \vec{B} \cdot d\vec{f} = \int \vec{B} \cdot \vec{n} \, du \, dv$$

den Fluß von \vec{B} durch die orientierte Fläche F .

c) Rotator und Satz von Stokes

Wir betrachten ein infinitesimales Oberflächenelement df mit Richtung \hat{n}

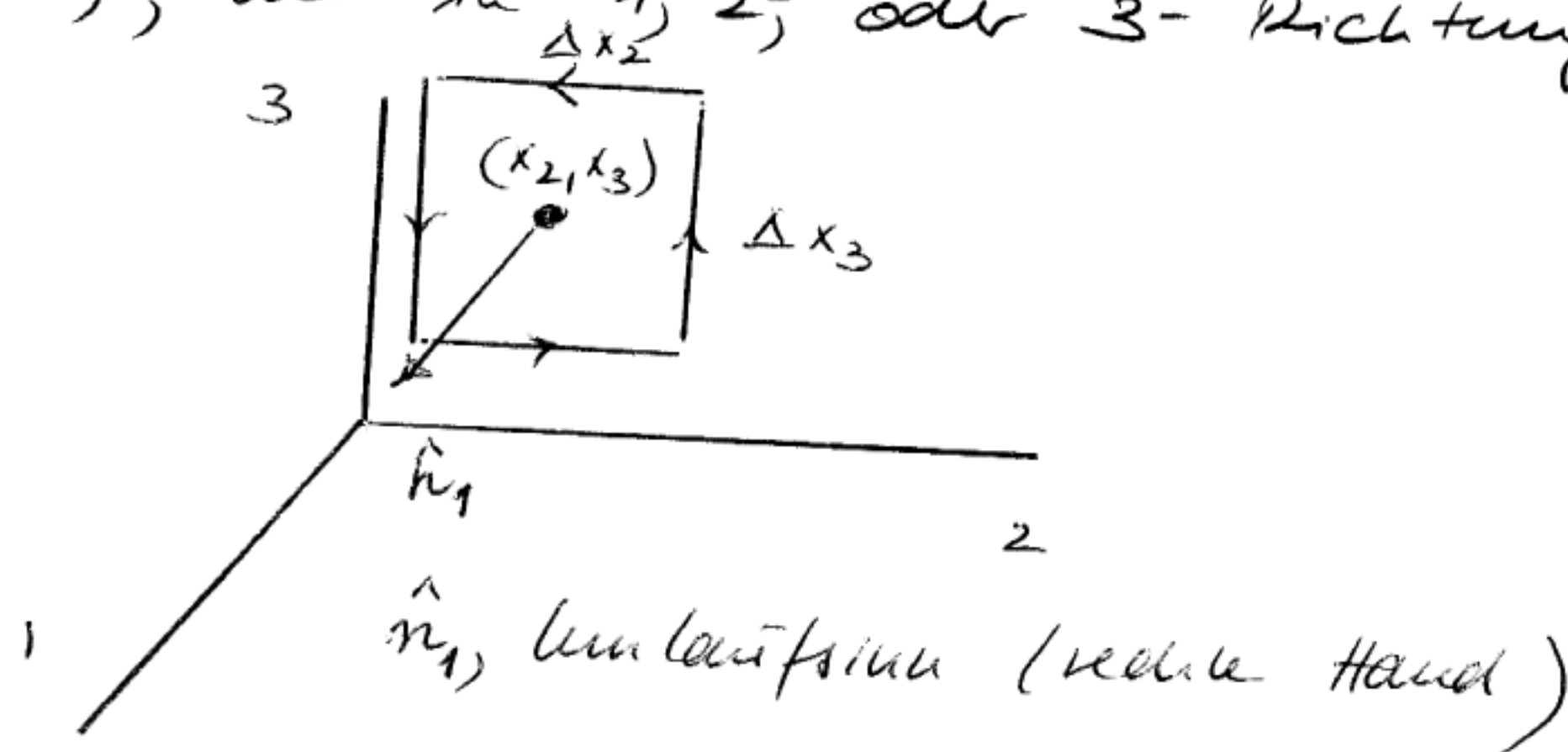


Dann wird durch

$$\hat{n} \cdot \text{rot } \vec{E} := \lim_{df \rightarrow 0} \frac{1}{df} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

die Rotator des Vektorfeldes \vec{E} definiert. Die Komponente der Rotator von \vec{E} entlang der Richtung eines beliebig gewählten (gerichteten) Oberflächenelementes ist gleich der Zirkulation ($\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$) auf der Umrandung C von df . Dies ist eine mathematische Quantifizierung des Wirbelbegriffs. Die Richtung von $\text{rot } \vec{E}$ gibt die Richtung maximaler Zirkulation des Vektorfeldes \vec{E} an.

Betrachte nun eine spezielle Fläche (Quadrat), die in 1, 2, oder 3-Richtung zeigt



Berechne das Linieneintegral (Zirkulation)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = \int_{x_2 - \frac{1}{2}\Delta x_2}^{x_2 + \frac{1}{2}\Delta x_2} dx_2 \left[E_2(x_1, x_2, x_3 - \frac{1}{2}\Delta x_3) - E_2(x_1, x_2, x_3 + \frac{1}{2}\Delta x_3) \right] \\ + \int_{x_3 - \frac{1}{2}\Delta x_3}^{x_3 + \frac{1}{2}\Delta x_3} dx_3 \left[E_3(x_1, x_2 + \frac{1}{2}\Delta x_2, x_3) - E_3(x_1, x_2 - \frac{1}{2}\Delta x_2, x_3) \right]$$

Taylor
 $= \Delta x_2 \cdot \Delta x_3 (\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2)$

$$\Rightarrow \underbrace{\hat{n}_1 \cdot \text{rot } \vec{E}}_{(\text{rot } \vec{E})_1} = \partial_2 E_3 - \partial_3 E_2$$

Alle anderen Fälle ergeben sich durch zykl. Permutation der Indizes (1, 2, 3)

$$\Rightarrow \boxed{\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}}$$

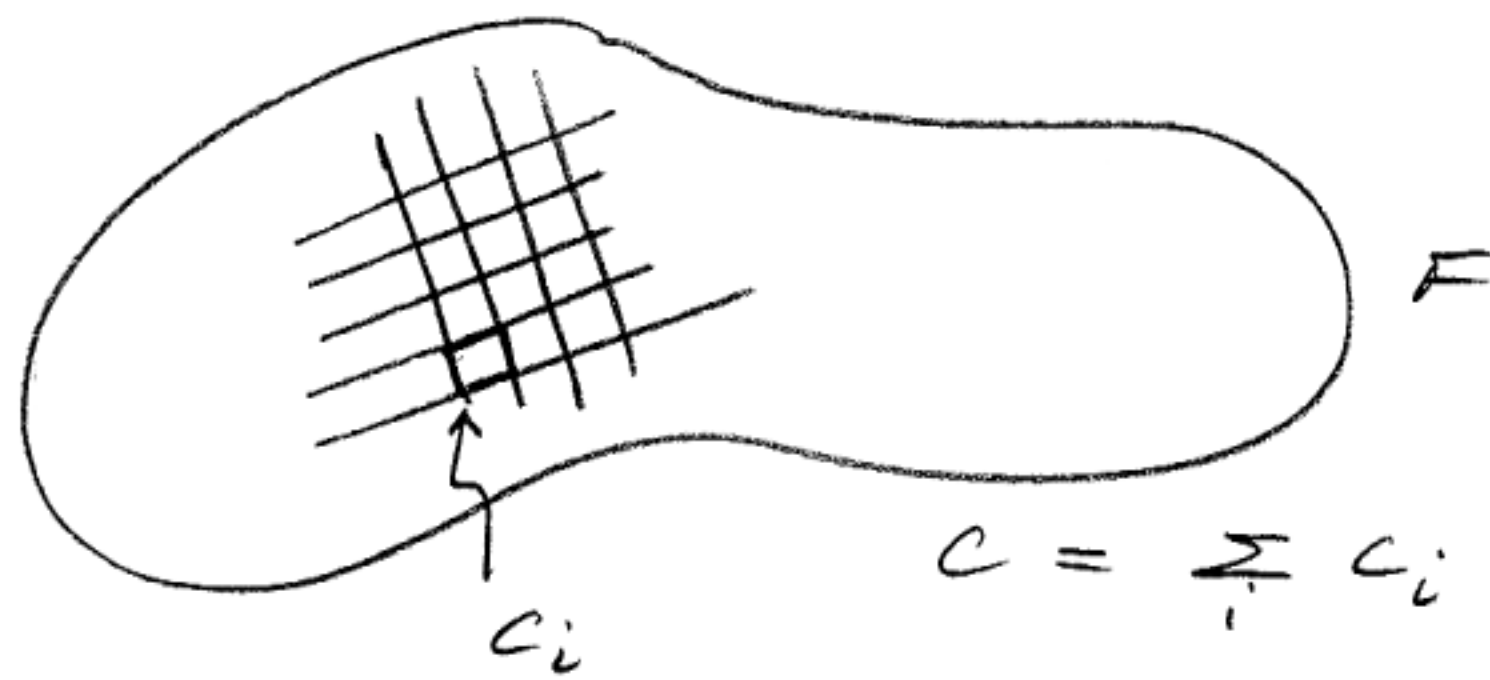
Gleichzeitig haben wir gezeigt, daß für ein infinitesimales Oberflächenelement gilt

$$\int_{df} \text{rot } \vec{E} \cdot \vec{n} df = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{e}$$

Dies läßt sich unmittelbar auf endliche Flächen verallgemeinern, wenn man diese aus infinitesimalen Elementen zusammensetzt.

Es gilt nämlich $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{e} = \sum_i \oint_{C_i} \vec{E} \cdot d\vec{e}$

da sich benachbarte Linienelemente kürzen.



Damit ergibt sich dann der Satz von Stokes

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{u}$$

Korollar: $|\nabla \times \vec{E} = 0 \Leftrightarrow \exists \phi: \vec{E} = -\nabla \phi|$

Beweis: \Leftarrow : trivial durch Nachrechnen

\Rightarrow : Nach dem Satz von Stokes folgt $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{u} = 0$. Folglich ist die Größe

$$\phi := - \int_C \vec{E} \cdot d\vec{u} \quad \text{wegunabhängig.}$$

Bei festgehaltenem Anfangspunkt 0 hängt ϕ nur vom Endpunkt P ab: $\phi(\vec{r})$

$$\hookrightarrow d\phi \stackrel{*)}{=} \nabla \phi \cdot d\vec{u} \stackrel{**)}{=} - \vec{E} \cdot d\vec{u}$$

Da $d\vec{u}$ beliebig $\leadsto \vec{E} = -\nabla \phi$.

*) Definition der Richtungsableitung.

***) $\phi = - \int \vec{E} \cdot d\vec{u}$.

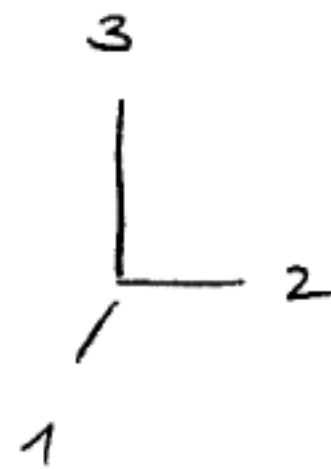
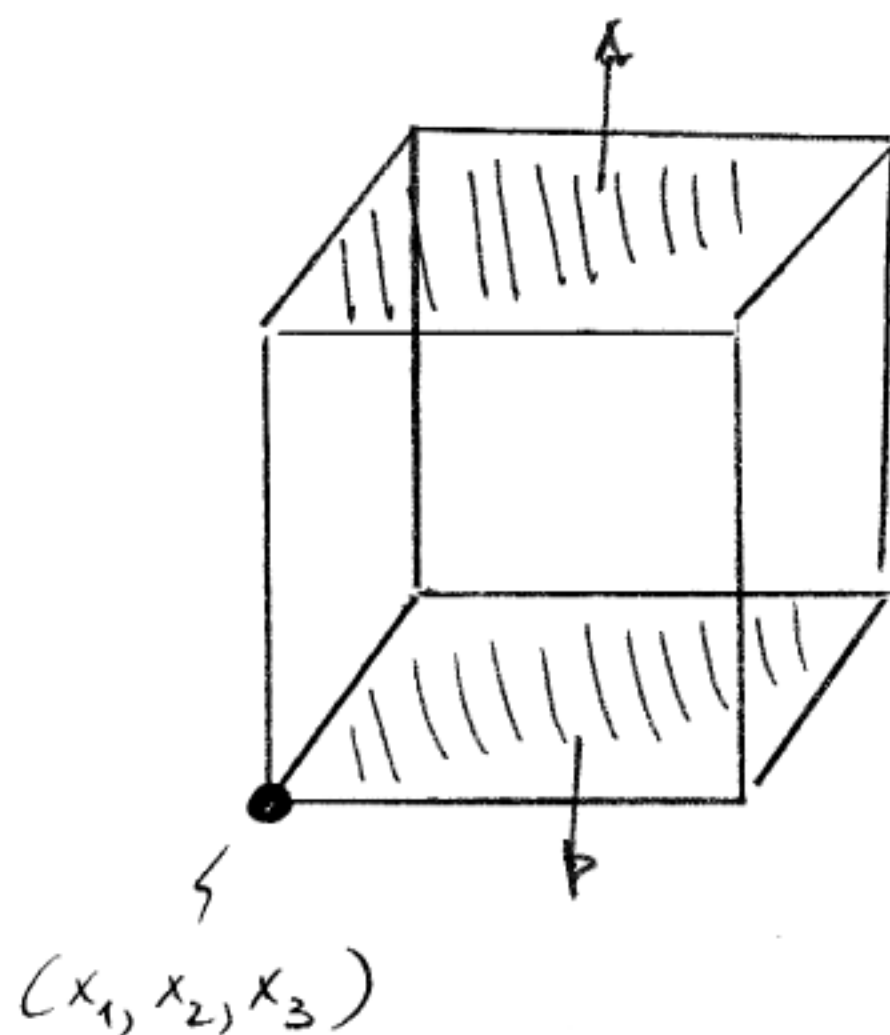
\hookrightarrow konservativ \Leftrightarrow Wirbelfrei

d) Der Gauß'sche Satz und Divergenz

Wir definieren nun die Divergenz eines Vektorfeldes als den Fluss durch die geschlossene Oberfläche ΔF eines infinitesimalen Volumenelements ΔV

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta F} \vec{E} \cdot d\vec{f}}$$

Betrachte nun einen Quader



Dann gilt

$$\operatorname{div} \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \left[\left(E_3(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - E_3(x_1, x_2, x_3) \right) \cdot \Delta x_1 \Delta x_2 + \text{zykl. Permutationen} \right]$$

$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} \partial_1 E_1 + \partial_2 E_2 + \partial_3 E_3 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

Gleichzeitig haben wir auch für ein infinitesimales Volumenelement gezeigt, dass gilt

$$\left| \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dV = \int_{F=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} \right|$$

Analog zum Satz von Stokes läßt sich diese Aussage unmittelbar auf endliche Volumenelemente erweitern: Gauß'scher Satz.

Korollar: Integralätze von Green

Für zwei Funktionen ϕ und ψ gilt nach der Produktregel

$$\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) = \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \phi \Delta \psi \quad \phi$$

$$\leadsto \vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) - \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{\nabla} \phi) = \phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi \quad (*)$$

Integriert man (*) über V so folgt aus dem Gauß'schen Satz

$$\left| \int_V dV (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) = \int_F d\vec{f} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \phi) \right|$$

(1. Green'scher Satz)

Entsprechend findet man aus ϕ

$$\left| \int_V dV (\phi \Delta \psi) = - \int_V dV \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \int_F d\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla} \psi \right|$$

(2. Green'scher Satz)

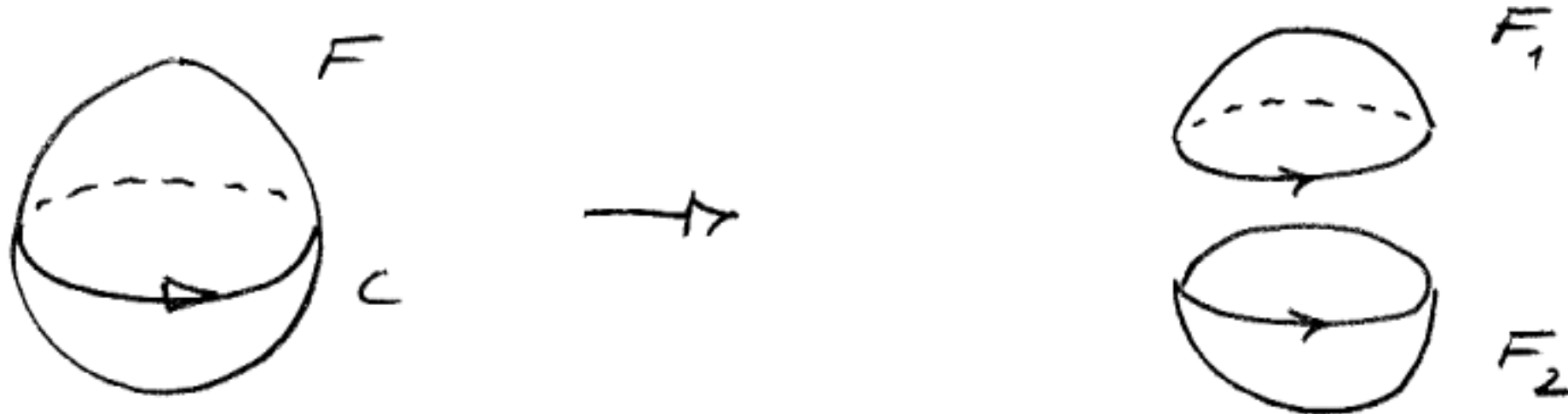
Korollar: $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0 \iff \exists \vec{A} : \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}}$

\vec{A} eindeutig bis auf $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$

Beweis: \Leftarrow trivial durch Nachrechnen.

\Rightarrow : Aus dem Satz von Gauß folgt aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

$$\oint_F d\vec{f} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{für eine geschlossene Fläche } F$$



$$\Lambda \int_{F_1} d\vec{f}_1 \cdot \vec{B} = \int_{F_2} d\vec{f}_2 \cdot \vec{B} \quad \text{mit } d\vec{f}_{1,2} = \pm d\vec{f}$$

Der Fluss $\phi_c = \int_F d\vec{f} \cdot \vec{B}$ durch eine Fläche

F , die von der Kurve C berandet ist, hängt nicht von der Form von F ab. Daher kann man diesen Fluss auch als ein Kurvenintegral entlang der Kurve mit einem neuen Vektorpotential \vec{A} schreiben $\phi_c = \int_C d\vec{e} \cdot \vec{A}$. Mit

dem Satz von Stokes folgt dann sofort

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Wegen $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Lambda = 0$ ist diese Zuordnung nur bis auf $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda$ (Eidrotato) eindeutig.

1.2.2. Fundamentalsatz der Vektoranalysis

Man kann Vektorfelder \vec{F} eindeutig aus ihren Quellen bestimmen

$\operatorname{div} \vec{F} = \rho(\vec{x})$	Quellen	(*)
$\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\omega}(\vec{x})$	Wirbel	

Wenn auf dem Rand ∂V des (einfach zusammenhängenden) Gebiets V die Normalenkomponente F_n oder die Tangentialkomponente \vec{F}_t vorgegeben sind.

Beweis: Annahme es gibt zwei unterschiedliche Lösungen \vec{F} und \vec{F}' , dann löst $\delta\vec{F} = \vec{F} - \vec{F}'$ das Randwertproblem $\operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$, $\operatorname{rot} \delta\vec{F} = 0$
auf ∂V : $\delta F_n = 0$ oder $\delta\vec{F}_t = 0$.

Aus $\operatorname{rot} \delta\vec{F} = 0$ folgt $\delta\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$
und mit $\operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$ genügt ϕ
dann der Laplace Gleichung: $\Delta\phi = 0$.

Wähle nun $\phi = \eta$ im 2. Green'schen Satz

$$\int_V dV (\vec{\nabla}\phi)^2 = \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \vec{\nabla}\phi = - \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \delta\vec{F}$$
$$= \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \phi \delta F_n$$

Falls $\delta F_n = 0$ ist die rechte Seite = 0.
Falls $\delta\vec{F}_t = 0$ dann ist ϕ entlang ∂V
konstant \leadsto r. S. = $-\phi \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \delta\vec{F} \stackrel{\text{Gauss}}{=} -\phi \int_V dV \operatorname{div} \delta\vec{F} = 0$.

Damit gibt insgesamt für beliebiges V

$$\int_V dV (\delta \vec{F})^2 = 0 \quad \wedge \quad \delta \vec{F} = 0.$$

Folged ist die Lösung des RW-Problems eindeutig.

Der Eindeutigkeitsatz gibt auch für unendliche Gebiete, wenn die Felder \vec{F} hinreichend schnell abfallen.

$$\vec{F} \sim r^{-\alpha} \quad \sim \quad \vec{\nabla} \phi \sim r^{-\alpha} \quad \sim \quad \phi \sim r^{-\alpha+1}$$

$$\text{r. S.} \quad \sim \quad \int d\Omega r^2 r^{-2\alpha+1} \rightarrow 0$$

$$\text{falls } -2\alpha + 3 < 0 \quad \text{also } \alpha > \frac{3}{2}.$$

Sind Quellen und Wirbel in einem Raumgebiet vorgegeben, so fallen die Felder für $r \rightarrow \infty$ wie das Coulombfeld $\sim r^{-2}$ ab.

Dies ist hinreichend für die Eindeutigkeit der Lösung!

Helmholtz'scher Hauptsatz

Jedes Vektorfeld \vec{F} mit ρ und $\vec{w} \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$ lässt sich in eindeutig in einen longitudinalen wirbelfreien Anteil \vec{F}_ρ und einen quellenfreien Anteil \vec{F}_w zerlegen

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{F} &= \vec{F}_\rho + \vec{F}_w \\ \text{rot } \vec{F}_\rho &= 0, \quad \text{div } \vec{F}_w = 0 \end{aligned}}$$

$d\Omega$ = Raumwinkel

$df = r^2 d\Omega$ für Kugel mit Radius r ,

Beweis: Wähle

$$\operatorname{rot} \vec{F}_\rho = 0; \operatorname{div} \vec{F}_\rho = \rho \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{F}_\omega = 0; \operatorname{rot} \vec{F}_\omega = \vec{\omega} \quad (2)$$

Nach dem Erdenstetigkeitssatz folgt die Behauptung.

Die explizite Konstruktion von \vec{F}_ρ und \vec{F}_ω aus ihren Quellen nehmen wir später vor. Für unendlich ausgedehnte Gebiete gilt

$$\vec{F}_\rho = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}') (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$\vec{F}_\omega = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \frac{\vec{\omega}(\vec{x}') \times (\vec{x} - \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

(i) Wirbelfreie Felder (Elektrostatik)

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho; \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Aus $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ folgt $\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

und damit dann

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \phi) = -\Delta \phi = 4\pi \rho$$

$$\Delta \phi = -4\pi \rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Die Lösung dieser Gleichung wird uns in der Elektrostatik beschäftigen.

(ii) Quellenfreie Felder (Magnetostatik)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} = \vec{\omega}$$

Aus $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ folgt $\exists \vec{A}$ mit

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \vec{\omega}$$

Nimmt man die Bedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, so ergibt sich wieder eine Poisson-Gleichung

$$\Delta \vec{A} = -\vec{\omega}$$

Lösung der Poissongleichung

$$\boxed{\Delta \phi = -4\pi \rho}$$

Betrachte eine Punktladung im Ursprung
 $\rho(\vec{x}) = q \delta(\vec{x})$

Verwende daß ϕ sphärische Symmetrie hat:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \phi) = 0 \text{ für } r > 0.$$

Die Lösung ist offensichtlich

$$\phi = \frac{C}{r} + \cancel{\mathcal{F}} \text{ irrelevant (Nahpunkt festlegen)}$$

Berechne nun ein Volumenintegral

über Kugel

$$\underbrace{\int_V dV \nabla^2 \phi}_{\text{Gauss}} = -4\pi \int_V \rho dV = -4\pi q$$

$$\text{Gauss} \quad \int_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{\nabla} \phi \quad \uparrow \quad = -\frac{C}{r^2} 4\pi r^2 \Rightarrow C = q$$

Kann Lösung für $r > 0$ auf ∂V verwenden, $\partial V =$ Kugeloberfläche mit Radius r .

Folglich ist die Lösung: $\phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}|}$

Die Lösung für eine allgemeine Ladungsverteilung ergibt sich dann aus Superposition, wobei der Ursprung des Koordinatensystems nun in \vec{x}' liegt

$$\boxed{\phi(\vec{x}) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}}$$

1. Mathematische Formulierung des Feldbegriffs

$$\vec{x}' = \mathcal{D} \vec{x} ; \quad \mathcal{D}^{-1} = \mathcal{D}^T$$

Skalarfeld : $\phi(\vec{x}') = \phi(\vec{x})$

Vektorfeld : $\vec{A}'(\vec{x}') = \mathcal{D} \vec{A}(\vec{x})$

($\cdot \text{Det } \mathcal{D} \rightsquigarrow$ Pseudofeld)

Gradient : $\frac{d\phi}{dl} = \vec{e} \cdot \vec{\nabla} \phi$ (Richtungsableitung)

$\vec{\nabla} \phi \perp$ Äquipotentialflächen
↑ stärkster Anstieg

Rotation : $\hat{n} \text{ rot } \vec{E} = \lim_{df \rightarrow 0} \frac{1}{df} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{E}$$

(Stokes) $\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_F \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{f}$

$\text{rot } \vec{E} = 0 \rightsquigarrow \exists \phi : \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$

konservativ \Leftrightarrow wirbelfrei

Divergenz : $\text{div } \vec{E} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta F} \vec{E} \cdot d\vec{f}$

$$\text{div } \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

(Gauß) $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \text{div } \vec{E} dV$

$\text{div } \vec{B} = 0 \rightsquigarrow \exists \vec{A} : \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$

Fundamentalsatz der Vektoranalysis :

Ein Vektorfeld ist durch Quellen und Wirbel eindeutig bestimmt und läßt sich immer in quellen- und wirbelfreie Anteile zerlegen

$$\vec{F} = \vec{F}_q + \vec{F}_w$$

$$\text{div } \vec{F}_w = 0 ; \quad \text{rot } \vec{F}_q = 0$$

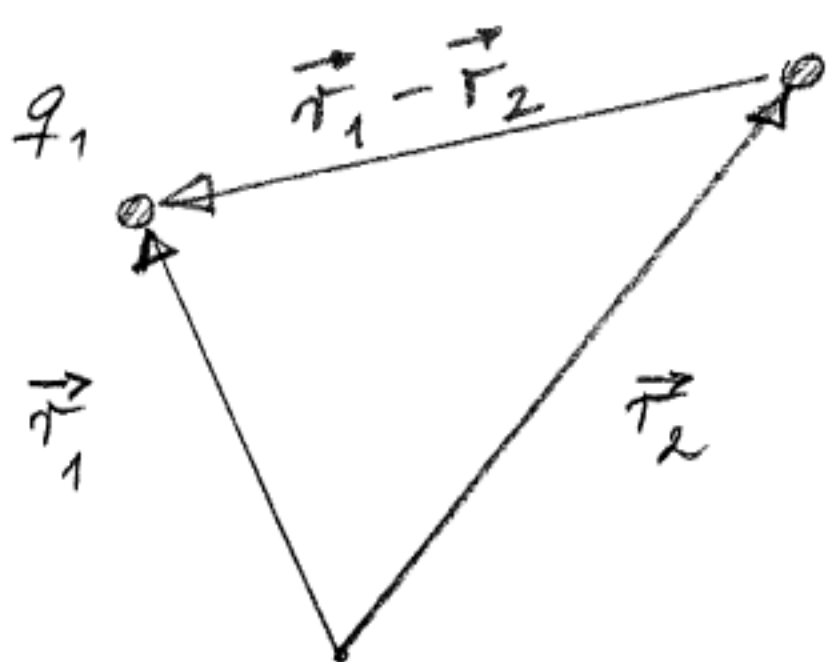
2. Die Grundgleichungen der Elektrodynamik

Die Elektrodynamik beschreibt elektrische und magnetische Felder, ihre Erzeugung durch Ladungen und elektrische Ströme, ihre Ausbreitung (elektromagnetische Wellen) und ihre Wechselwirkung mit Materie.

2.1. Ladungen und Ströme

Neben Masse und anderen Merkmalen besitzt Materie die Eigenschaft, dass sie „elektrisch geladen“ ist. Die Ladung q eines Körpers ist eine extensive Größe, die sowohl positiv wie negativ sein kann. Das Coulomb'sche Gesetz fasst die Erfahrung über Kräfte zwischen ruhenden Punktladungen*) zusammen:

$$\vec{F}_{12} = k q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = - \vec{F}_{21}$$



q_2
 \vec{F}_{12} : Kraft der Ladung q_2
auf die Ladung q_1
 $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$: Abstandsvektor

beliebig gewählter Ursprung
eines Koordinatensystems

*) Punktladungen sind idealisierte Objekte, deren Ausmaße klein gegenüber ihren Abständen sind (im Idealfall mathematische Punkte).

Die Wahl der Konstante k legt das System der Einheiten fest.

Elektrostatische Einheiten (ESU) $k=1$

Die Einheitsladung wird so gewählt, daß solche über einen Abstand von 1 cm eine Kraft von 1 dyn aufeinander ausüben:
 $1 \text{ esu} = 1 \text{ cm dyn}^{1/2}$ ($1 \text{ dyn} = 10^{-5} \text{ N}$).
Damit wird die Einheit der Ladung über rein mechanische Größen definiert. Wir werden diese Einheitenwahl in der Vorlesung verwenden.

SI (MKSA) Einheiten (System Internationale)

Zu den mechanischen Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde tritt als elektrische Einheit der Ampere für die Stromstärke hinzu, daraus ergibt sich die Ladungseinheit

$$1 \text{ C (Coulomb)} = 1 \text{ As}$$

Das Ampere ist so definiert, daß

$$k = 10^{-7} \text{ C}^2 \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$$

mit $c = 2,9979250 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (Lichtgeschw. im Vakuum), kann man setzen

$$\underline{k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}}; \quad \epsilon_0 = 8,8543 \cdot 10^{-12} \frac{\text{A}^2 \text{s}^2}{\text{Nm}^2},$$

mit der Infinitesimalkonstante (oder auch Dielektrizitätskonstante des Vakuums) ϵ_0 .

$$1 \text{ dyn} = 1 \text{ g} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}; \quad 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Daher auch CGS = Centimeter - Gramm - Sekunde System
und MKSA = Meter - Kilogramm - Sekunde - Ampere System.

Da wesentliche an dem Coulombschen Gesetz
ist natürlich wieder die Lage der Erheiter,
sondern

$$(1) F \sim \frac{1}{r^2}$$

$$(2) \text{ zentraler Charakter} \sim \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

(3) Superpositionsprinzip: Die elektrischen
Kräfte, die auf eine Probeladung q von
mehreren Ladungen q_1, q_2, \dots ausgeübt
werden, überlagern sich ungestört, ohne
daß die Anwesenheit der verschiedenen
Ladungen die Kraft zwischen q und einer
bestimmten Ladung q_i verändert.

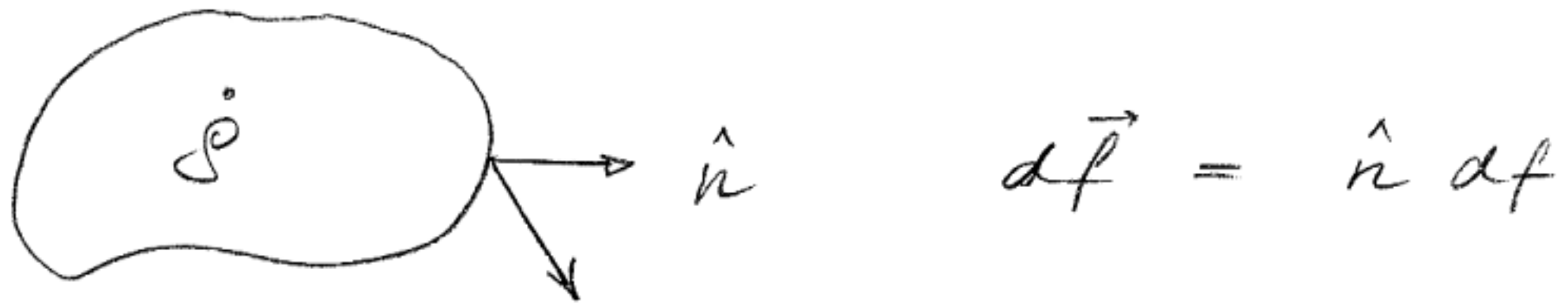
Leiten Eigenschaften der Ladungen

Ladungen sind extensiv, d. h. die Gesamt-
ladung Q eines Körpers ergibt sich aus der
Summe der Teil Ladungen q_i

$$Q = \sum_i q_i$$

Ladungen sind erhalten, d. h. die zeitliche
Änderung einer Ladungsdichte $\rho(\vec{r}, t)$ in
einem Volumen V entspricht genau dem
Stromfluß (Ladungsfluß) durch die Oberfläche
 ∂V dieses Volumens

$$\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t} = - \oint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{f}$$



$$\vec{j} = \rho \vec{v} \quad \text{Stromfluß}$$

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \quad (\text{am Gauß'schen Satz})$$

2.2. Die Lorentzkraft

Wir abstrahieren nun von der Kraftwirkung zwischen zwei nahenden Ladungen auf den Begriff des elektrischen Feldes:

$$\vec{E} := \lim_{\Delta q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{\Delta q}$$

also als die Kraft einer Ladungsanordnung auf eine Testladung Δq (pro Testladungsstarke) im Limes $\Delta q \rightarrow 0$.

Dann gilt dann $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$ für die Kraft auf eine Punktladung q , die von dem elektrischen Feld \vec{E} erzeugt wird.

Kann beobachtet man, daß zur vollständigen Charakterisierung der Kraft auf eine ^{bewegliche} Punktladung neben dem elektrischen Feld \vec{E} ein weiteres Feld \vec{B} notwendig ist, so daß insgesamt gilt

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)} \quad [\text{AXIOM 1}]$$

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladung, und c die Lichtgeschwindigkeit ist. \vec{B} heiet magnetische Feld und \vec{F} Lorentzkraft.

2.3. Die Maxwell Gleichungen

Wir haben inzwischen eine skalare Größe,
 $\rho(\vec{x}, t)$ = Ladungsdichte und drei vektorielle
Größen kennengelernt

$\vec{j}(\vec{x}, t)$ = Stromdichte

$\vec{E}(\vec{x}, t)$ = elektrisches Feld

$\vec{B}(\vec{x}, t)$ = magnetisches Feld

Beachte, daß aus der Form der Lorentzkraft
klar ist, daß \vec{B} ein Pseudo-Vektorfeld
sein muß.

Jetzt müssen wir die Grundgleichungen
formulieren, denen diese Größen genügen sollen.
Wir können diese Gleichungen ebenso wenig wie
die Newtonschen Gleichungen oder die Schrödinger-
gleichung herleiten, sondern müssen sie
postulieren. Diese Punkte sind die Zusammen-
fassung langjähriger experimenteller und theoretischer
Forschungsarbeiten, d.h. phänomenologischer Natur.

→ phänomenolog. Feldtheorie

Diese Aussage gilt für jede physikalische
Theorie, auch die sog. fundamentalen
Theorien!

2.3.1. Homogene Maxwellgleichungen

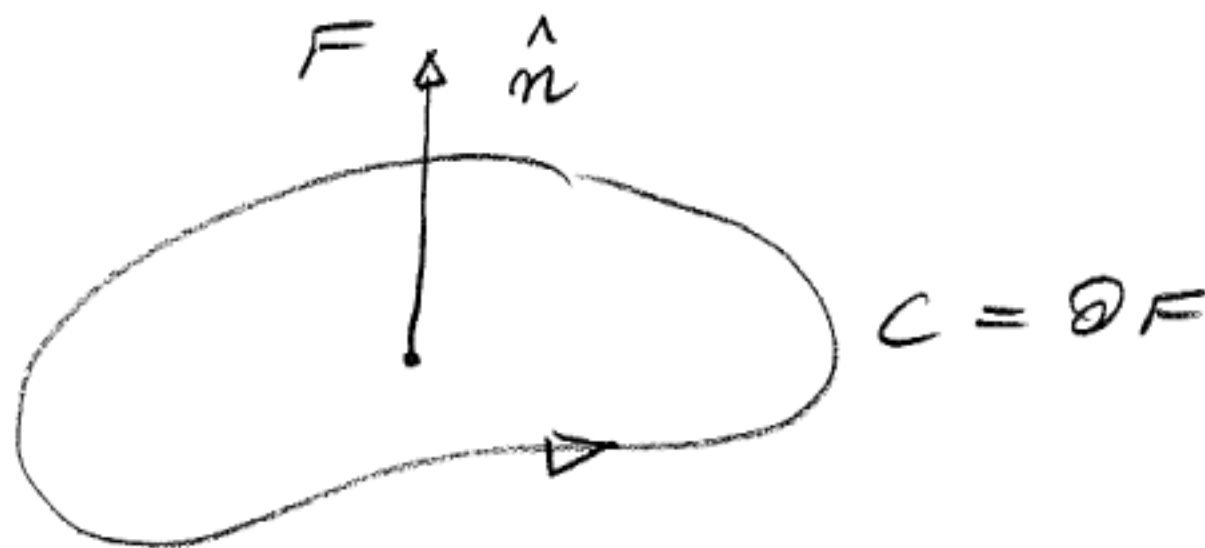
Magnetische Felder besitzen keine Quellen

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0} \quad (\text{Axiom 2})$$

Faraday'sches Induktionsgesetz:

Die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ϕ durch eine Fläche F erzeugt einen elektrischen Wirbelstrom

$$\frac{1}{c} \partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{f} = - \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Axiom 3})$$



$$\frac{1}{c} \dot{\phi} = - \mathcal{E} ; \quad \mathcal{E} = \text{elektromotr. Kraft}$$

Das Vorzeichen entspricht der Lenz'schen Regel.

Mit dem Satz von Stokes

$$\oint_{\partial F} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_F \operatorname{rot} \vec{E} \cdot d\vec{f}$$

Lässt sich das Faraday'sche Induktionsgesetz auch in differentieller Form schreiben:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0} \quad (\text{Axiom 3})'$$

Bemerkung: Im stationären Fall $\partial_t \vec{E} = 0$ ergibt sich $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ alleine aus dem zentralen Charakter des Coulomb'schen Gesetzes!

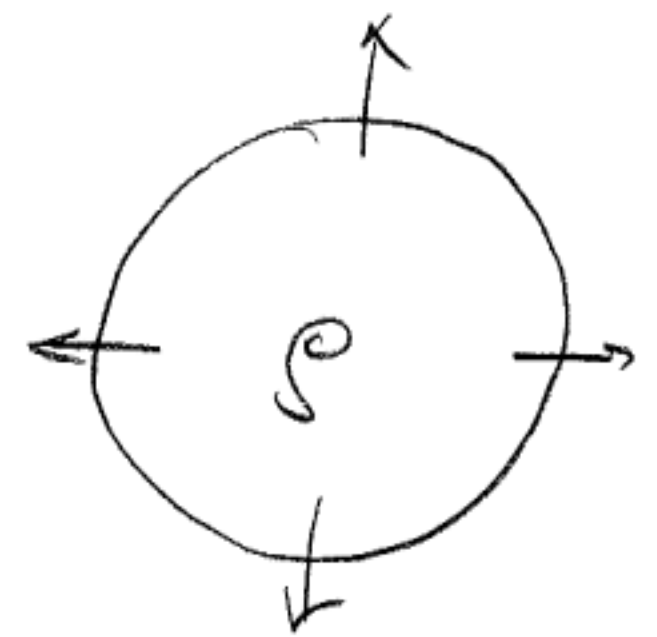
Aus den Axiomen (2) und (3) lassen sich sogenannte elektrodynamische Potentiale ableiten; darauf gehen wir später ein.

2.3.2. Inhomogene Maxwellgleichungen

Die inhomogenen Maxwellgleichungen beschreiben die Ankopplung der elektrischen und magnetischen Felder an Ladungsdichten und Stromdichten. Sie lauten:

Coulomb'sches Gesetz: Ladungen sind die Quellen des elektrischen Feldes

$$\oint_{F=\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int_V \rho \, dV$$



Mit dem Gauß'schen Satz

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int_V \operatorname{div} \vec{E} \, dV$$

folgt die differentielle Form

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho} \quad (\text{Axiom 4})$$

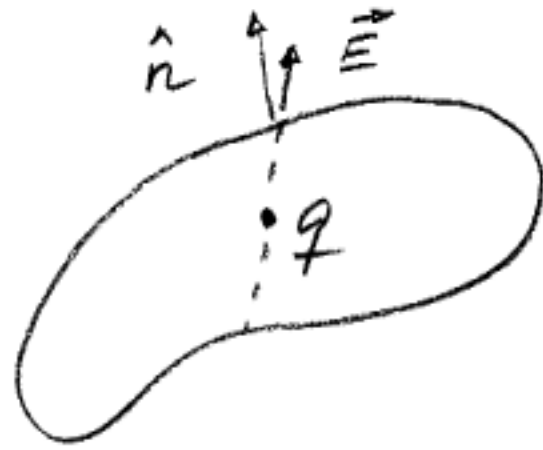
Das Coulomb'sche Gesetz lässt sich aus dem Coulomb'schen Kraftgesetz und dem Superpositionsprinzip ableiten. Dabei ist die $1/r^2$ -Form wesentlich! Beachte aber, dass Axiom 4 allgemeiner, also auch für zeitliche Probleme, gilt, während das Coulomb'sche Kraftgesetz nur für ruhende Ladungen gilt.

Nebenrechnungen (zu den Bemerkungen)

Für eine allgemeine Ladungsdichte gibt nach dem Coulomb'schen Kraftgesetz

$$\vec{E}(\vec{x}) = \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

1) Betrachte eine Punktladung q



$$\vec{E} \cdot d\vec{f} = \vec{E} \cdot \hat{n} df = \frac{q}{r^2} \underbrace{\frac{\vec{x}}{r} \cdot \hat{n}}_{\cos \theta} df$$

$|\vec{x}| = r$

$$df = r^2 d\Omega / \cos \theta$$

$\Omega =$ Raumwinkel

$$\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = \int \frac{q}{r^2} r^2 d\Omega = 4\pi q$$

r^2 kürzt sich!

\nearrow allgemein $\oint_{\partial V} \vec{E} \cdot d\vec{f} = 4\pi \sum_i q_i = 4\pi \int \rho dV$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} &= \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \underbrace{\vec{\nabla} \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}}_{= \vec{\nabla} \left(-\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \right)} \\ &= \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } \phi = \int d^3\vec{x}' \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

Skalar Potential,

Ampere - Maxwell Gesetz

Elektrische Ströme und Verschiebungsströme sind Quellen für magnetische Wirbel

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{e} = \underbrace{\frac{4\pi}{c} \int_F \vec{j} \cdot d\vec{f}}_{\text{Ampere}} + \underbrace{\frac{1}{c} \partial_t \int_F \vec{E} \cdot d\vec{f}}_{\text{Maxwell'scher Verschiebungsstrom}}$$

oder in differentieller Form

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (\text{Axiom 5})$$

Man beachte, daß der Maxwell'sche Verschiebungsstrom notwendig ist um die Ladungserhaltung zu gewährleisten.

Bilde dazu die Divergenz auf beiden Seiten

$$-\frac{1}{c} \partial_t \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}}_{= 4\pi\rho \text{ nach dem Coulomb Gesetz}} - \frac{4\pi}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} \iff \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad \checkmark$$

Bis auf den Verschiebungsstrom waren die Grundgleichungen der Elektrodynamik bereits vor Maxwell bekannt.

(Zusammenfassung)

Maxwell-Gleichungen

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{(keine magn. Monopole,} \\ \text{(Coulomb)} \\ \text{(Ampere-Maxwell)} \\ \text{(Faraday} \\ \text{+ Lenz)} \end{array}$$

Lorentzkraft auf Punktladung q

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$$

Statische Felder : $\partial_t = 0$

Dann entkoppeln elektrische und magnetische Felder

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho$$

(Elektrostatik)

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

(Magnetostatik)

Übergang zu SI-Einheiten

$$\begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \end{array} ; \quad \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} = \vec{j} \cdot \mu_0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \partial_t \vec{B} = 0 \end{array}$$

$$\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 1/c$$

ϵ_0 und μ_0 bezeichnen elektrische und magnetische Permeabilität des Vakuums

2.3.3. Elektrodynamische Potentiale

Wir verwenden nun grundlegende Sätze aus der Vektoranalysis um die elektrodynamischen Potentiale einzuführen. Damit lassen sich die 6 Funktionen (\vec{E}, \vec{B}) auf 4 Funktionen (ϕ, \vec{A}) und eine Eichfreiheit reduzieren.

Aus der Quellenfreiheit, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, des magn. Feldes folgt, daß man \vec{B} als Rotation eines Vektorpotentials schreiben kann

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Dabei ist \vec{A} eindeutig bis auf die Transformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda,$$

wobei Λ ein beliebiges skalares Feld ist.

Damit lassen sich die Faraday'sche Induktionsgesetz auf die Form

$$0 = \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} + \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} + \vec{E} \right)$$

bringen. Folglich gilt

$$\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} + \vec{E} = - \vec{\nabla} \phi,$$

wobei das skalare Feld ϕ eindeutig bis auf $\phi_0(t)$ unabh. von \vec{x} . Zusammen gilt

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B} &= \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= - \vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \end{aligned}}$$

\vec{A} heisst Vektorpotential, ϕ skalares Potential.

\vec{E} und \vec{B} bleiben unverändert unter der Eichtransformation

$$\begin{array}{l} \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \\ \phi \rightarrow \phi' = \phi + \phi_0(t) - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda \end{array}$$

(Beweis durch Einsetzen)

Beispiele für Eichungen:

(a) Strahlungseichung: $\phi', \vec{A}' = (\phi_s, \vec{A}_s)$

Wähle $|\phi_s = 0|$

$$0 = \phi + \phi_0(t) - \frac{1}{c} \partial_t \Lambda(\vec{x}, t) \quad \Big| \int_0^t d\tau$$

$$\Lambda(\vec{x}, t) = \Lambda(\vec{x}, 0) + c \int_0^t d\tau (\phi(\vec{x}, \tau) - \phi_0(\tau))$$

Dann

$$|\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_s; \quad \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A}_s|$$

(b) Lorentzeichung: $\phi', \vec{A}' = (\phi_L, \vec{A}_L)$

Sei $\psi := \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi$. Dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \phi' = \psi + \Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda \stackrel{!}{=} 0$$

$$\text{Wähle } \Lambda \text{ so daß } \Delta \Lambda - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Lambda = -\psi$$

Dann

$$|\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_L + \frac{1}{c} \partial_t \phi_L = 0|$$

In der Lorentzeichung sind die Potentiale bis auf eine skalare Funktion $\tilde{\Lambda}$ eindeutig, welche der Wellengleichung genügt!

$$\Delta \tilde{\Lambda} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \tilde{\Lambda} = \square \tilde{\Lambda} = 0$$

\square D'Alembert operator

$\Delta = \nabla^2$ Laplace operator

c) Coulomb gauge $(\phi', \vec{A}') = (\phi_c, \vec{A}_c)$

Wähle Λ so daß $\boxed{\text{div } \vec{A}' = 0}$

$$0 = \text{div } \vec{A}' = \text{div } \vec{A} + \Delta \Lambda$$

Man kann nun Λ der jeweiligen Eichung die inhomogenen Maxwellgleichungen durch Vektor- und Skalar-Potential ausdrücken.

Das Coulombsche Gesetz lässt sich als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \right) = 4\pi \rho$$

oder

$$\boxed{\Delta \phi + \frac{1}{c} \partial_t (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -4\pi \rho} \quad (\text{Coulomb})$$

schreiben.

Das Ampere-Maxwell Gesetz bekommt die Form

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \left(-\vec{\nabla} \phi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A} \right)$$

*)
bzw.

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \partial_t \phi) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}} \quad (\text{Ampere-Maxwell})$$

$$\begin{aligned} *) \quad [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})]_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j \varepsilon_{klm} \partial_l A_m = (\delta_{ic} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jc}) \partial_j \partial_l A_m \\ &= \partial_i \partial_l A_l - \partial_l \partial_l A_i = [\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}]_i \end{aligned}$$

Lorenzgleichung: In dieser Gleichung entkoppeln
 das skalare Potential ϕ und das Vektorpotential
 \vec{A} . Man erhält für beide eine Wellengleichung

$$\square \phi = \Delta \phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \phi = -4\pi \rho$$

$$\square \vec{A} = \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

oder kürzer
$$\square \begin{pmatrix} \phi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

Coulombgleichung: In der Coulombgleichung
 reduziert sich die Gleichung für das skalare
 Potential ϕ auf die Poisson Gleichung*)

$$\Delta \phi = -4\pi \rho$$

Wie wir später sehen werden ist diese Gleichung
 von fundamentaler Bedeutung für die
 Elektrostatik (und weit darüber hinaus!).
 Ihre Lösung für eine vorgegebene Ladungs-
 verteilung $\rho(\vec{x}, t)$ lautet*)

$$\phi(\vec{x}, t) = \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

also das momentane Coulombpotential der
 Ladungsdichte $\rho(\vec{x}, t)$.

*) Der Spezialfall $\Delta \phi = 0$ heißt Laplace Gleichung.

*) Später werden wir den Fall diskutieren, daß $\rho(\vec{x})$
 innerhalb eines beliebigen Volumens gegeben ist und
 der Effekt der restlichen Ladungen (außerhalb V) durch
 Randbedingungen auf ∂V formuliert werden (Elektrostatik).

Die Gleichung für das Vektorpotential lautet

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \partial_t \phi$$

Wir zerlegen nun den Strom in einen longitudinalen und transversalen Anteil

$$\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_t$$

wobei $\vec{\nabla} \times \vec{j}_e = 0$ wirbelfrei und $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = 0$ quellfrei ist, das ist nach Sätzen der Vektoranalysis immer möglich.

Unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ oder $\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0$ führt die Poissongleichung auf

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = -\partial_t \rho = +\partial_t \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{j}_e - \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \partial_t \phi \right) = 0$$

Wegen $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = 0$ und $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \phi = 0$ folgt dann

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j}_e = \frac{1}{c} \partial_t \vec{\nabla} \phi$$

Folgerung gilt

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \frac{1}{c} \partial_t^2 \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}_t}$$

i.e. die Quellen des Vektorpotentials sind die transversalen Ströme mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_t = 0$.

Die Eichung heißt daher häufig auch, transversale Eichung!

$$\begin{aligned} \text{Da } \vec{j}_e &= \frac{1}{4\pi} \partial_t \vec{\nabla} \phi = \frac{1}{4\pi} \partial_t \vec{\nabla} \int \frac{\rho(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \\ &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \end{aligned}$$

kann man den transversalen Strom schreiben als

$$\vec{j}_t = \vec{j} - \vec{j}_e = \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \int \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}(\vec{x}', t)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'$$

2.4. Der Energieerhaltungssatz

Die Rate mit der ein elem. Feld Arbeit an einer Ladung verrichtet ergibt sich aus der Lorentzkraft

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = q \left(\vec{v} \cdot \vec{E} + \underbrace{\vec{v} \cdot \left(\frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)}_{=0} \right)$$

Daher gibt allgemein für eine Stromdichte $\vec{j} = \rho \vec{v}$
 $\int d^3x \vec{j} \cdot \vec{E}$
in die Energie transfer rate von elem. Feld
auf eine Ladungsverteilung.

Wir verwenden nun die Maxwellgleichungen um \vec{j} zu eliminieren

$$\begin{aligned} \vec{j} \cdot \vec{E} &= \underbrace{\frac{c}{4\pi}}_{\text{Ampere Maxwell}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right) \cdot \vec{E} \\ &\quad - \underbrace{\frac{c}{4\pi}}_{\text{Faraday}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} \right) \cdot \vec{B} \\ &= - \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) - \frac{1}{8\pi} \partial_t (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \end{aligned}$$

Dabei nutzen wir die Vektoridentität^{*)}

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E}$$

verwendet

^{*)} $[\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})] = \partial_i \epsilon_{ijk} E_j B_k = \epsilon_{ijk} [(\partial_i E_j) B_k + E_j \partial_i B_k]$
 $= (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{B} - (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{E};$

Interpretation

(I) In der Abwesenheit von Ladungen ($\vec{j} = 0$) gilt

$$\partial_t \left(\underbrace{\frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{8\pi}}_{=: u} \right) + \vec{\nabla} \cdot \left(\underbrace{\frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}}_{=: \vec{S}} \right) = 0$$

Energiedichte

Energiestromdichte
Poynting Vektor

$$\partial_t u + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0$$

analoge Form zu Ladungserhaltung

(II) In der Gegenwart von Ladungen gilt

$$\partial_t u + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

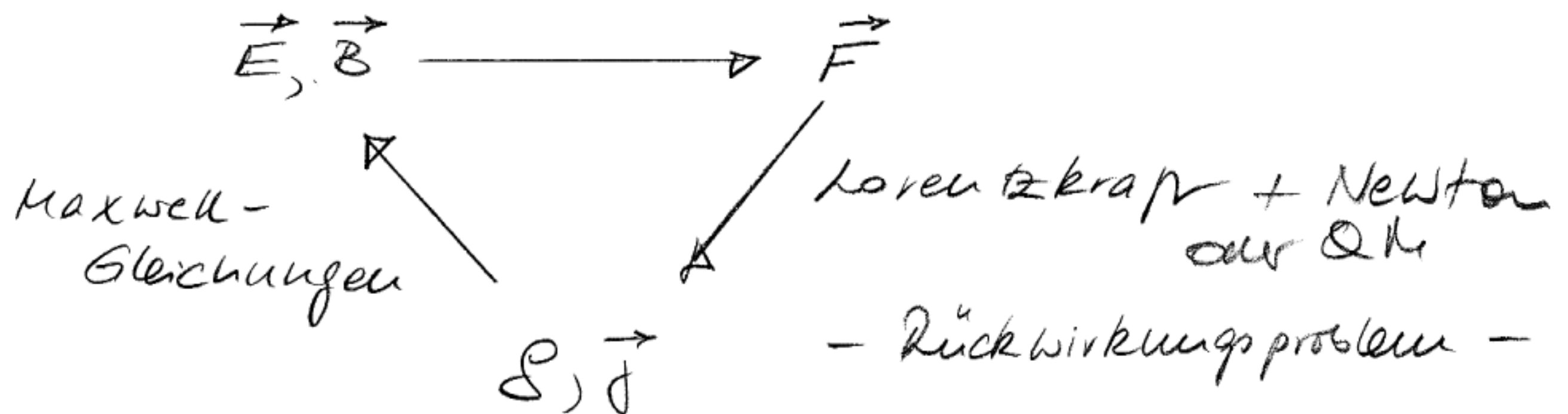
oder

$$\frac{d}{dt} \int_V dV u + \oint_{\partial V} \vec{S} d\vec{f} + \int_V dV \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Die zeitliche Änderung der Energie des elem. Feldes ergibt sich über den Verlust von Energieströmen durch die Oberfl. und der Rate des Energieübertrags auf die Ladungen.

3. Elektrodynamik makroskopischer Medien

3.1. Formulierung der makroskopischen Theorie



Für makroskopische Systeme sind die mikroskop. Maxwellgleichungen praktisch unlösbar, da man ein Vielteilchenproblem vorliegen hat (\rightarrow Rückwirkungsproblem)! Man muß notwendigerweise auf Konzepte der statistischen Physik zurückgreifen. Außerdem wissen wir, daß für eine Beschreibung vieler Eigenschaften der Materie auch Konzepte der Quantenmechanik unverzichtbar sind.

Folglich, werden wir für die Formulierung der Elektrodynamik makroskopischer Medien eine phänomenologische Vorgehensweise wählen.

Man erwartet, daß man bei der Beschreibung makroskopischer Körper einen Teil der Quellen (Ladungen ρ und Ströme \vec{j}) als extern annehmen kann, d.h. aus dem "Rückwirkungsproblem" herausnehmen kann. Wir sprechen dann auch synonym von "aufgeprägt", "explizit", "von außen vorgegeben", "von außen manipulierbar", etc. Ladungen und Ströme: ρ_e, \vec{j}_e

Der Rest der Ladungen und Ströme bezeichnen wir als induziert, d. h. dass

(i) sie über den Zyklus [externe Quellen \rightarrow Felder \rightarrow Lorentzkraft] im makroskopischen System induziert (oder erzeugt) werden.

(ii) sie Teil in Rückwirkungsproblemen sind. Symmetrisch spricht man auch von „internen“, „impliziten“ oder eben „induzierten“ Quellen:
 ρ_i, \vec{j}_i

Formal schreiben wir

$$\rho = \rho_e + \rho_i \quad ; \quad \vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_i$$

und fordern, dass jedes Paar separat die Kontinuitätsgleichung erfüllt.

$$\partial_t \rho_{e/i} + \operatorname{div} \vec{j}_{e/i} = 0$$

Eine solche Aufteilung ist natürlich rein formal immer möglich. Sie gewinnt jedoch erst dadurch Sinn, dass man den jeweiligen Anteilen eine physikalisch messbare Größe zuordnet!

Wir definieren nun makroskopische Felder \vec{P} und \vec{M} auf folgende Weise. Zunächst sollen die induzierten Ladungen als Quellen von \vec{P} aufgefasst werden:

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho_i$$

Dann gibt aufgrund der geforderten Kontinuitätsgleichung für die induzierten Ströme und Ladungen

$$0 = \partial_t \rho_i + \operatorname{div} \vec{j}_i \\ = \operatorname{div} (-\partial_t \vec{P} + \vec{j}_i)$$

so daß man (...) als Rotation eines weiteren Vektorfeldes \vec{M} schreiben kann

$$\operatorname{curl} \vec{M} = -\partial_t \vec{P} + \vec{j}_i$$

Damit hat man ganz analog zum Ampere-Maxwell Gesetz für die Wirbel von \vec{H} zwei Quellterme, einen (induzierten) Strom \vec{j}_i und einen (induzierten) Verdrängungsstrom $-\partial_t \vec{P}$. (Damit sind \vec{H} und \vec{P} wieder eindeutig festgelegt, da man dazu sowohl Rotation und Divergenz der Vektorfelder festlegen mußte) Die inhomogenen Maxwellgleichungen lassen sich dann formal schreiben als

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{4\pi}{c} \partial_t \vec{P} + 4\pi \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

Nur definieren nun

$$\vec{D} := \vec{E} + 4\pi \vec{P} \\ \vec{H} := \vec{B} - 4\pi \vec{M}$$

dielekt. Verdrängung

magn. Feldstärke

\vec{P} heisst Polarisation; \vec{M} heisst Magnetisierung

Dann lautet die inhomogene Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 4\pi \rho_e \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j}_e + \frac{1}{c} \partial_t \vec{D} \end{aligned} \quad *)$$

d.h. die Quellen treten nur für \vec{D} und \vec{H} auf die expliziten Quellen reduzieren. Unser „Wissen“ über die Materie haben wir in dem Zusammenhang zwischen \vec{D} , \vec{H} und \vec{E} , \vec{B} „versteckt“. Beachte, daß die Maxwellgleichungen lösbar sind falls man die Ladungen und Quellen vorgibt, also (ρ_e, \vec{j}_e) und (ρ_i, \vec{j}_i) oder gleichbedeutend (ρ_e, \vec{j}_e) und (\vec{P}, \vec{M}) ; andernfalls ist das Gleichungssystem unterbestimmt. Oder, mit anderen Worten, bisher haben wir eine rein formale Umschreibung der Maxwellgleichungen vorgenommen, deren physikalische Relevanz sich aus der physikalischen Interpretation der Felder \vec{P} und \vec{M} ergibt.

*) Die homogenen Maxwellgleichungen bleiben natürlich unverändert.

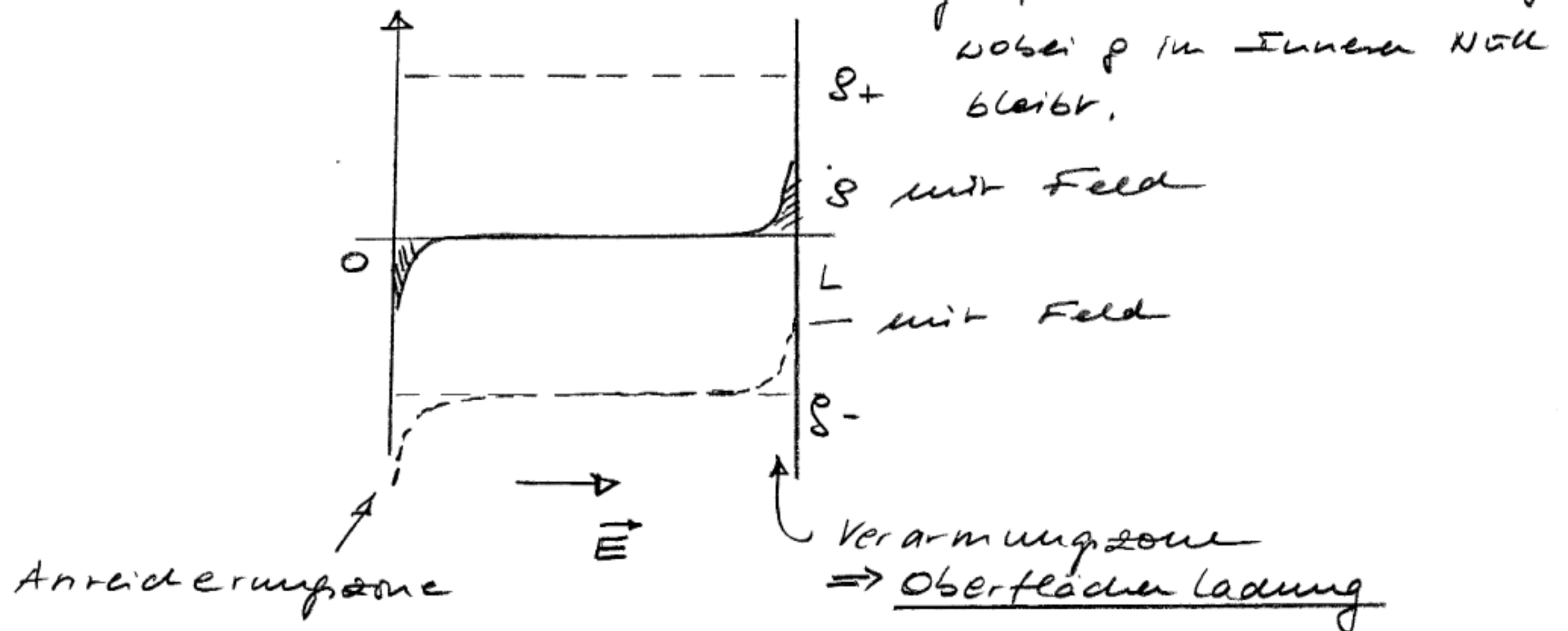
3.2. Veranschaulichung der Felder \vec{E} und \vec{H}

Neutraler Isolator: $\rho_e = 0$; implizite Ladungen gebunden an Atome, und $\rho_i = 0$ ohne äußere Felder. Äußere elektrisches Feld bewirkt über Lorentzkraft eine relative Verschiebung von positiven und negativen Ladungen (Kerne und Elektronen).

$$\rho = \rho_+ + \rho_-$$

homogener feldfreier Isolator: $\rho_+ = -\rho_- = \text{const.}$

mit Feld: relative Verschiebung führt zu Randladungen



(Falls \vec{E} im Inneren inhomogen, so entstehen auch dort Raumladungen).

Die durch das Anlegen des Feldes entstandene Ladungsverteilung $\rho_i = \rho$ heißt Polarisationsladungsdichte; es gilt wegen Neutralität $\int \rho dV = 0$.

* Hier wird natürlich angenommen, dass die Felder nicht stark genug sind um die Elektronen aus dem Atomverband herauszulösen.

Führe nun eine vektorielle Verschiebungsdichte $\vec{P}(\vec{r})$ ein, so dass $\vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{f}$ angibt wieviel Ladung sich durch das Flächenelement $d\vec{f}$ verschieben hat, $\vec{P} = 0$ im Außenraum des Isolators.

$$\text{Es gilt } \oint_{\partial V} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{f} = - \int_V \rho \, dV \quad (\text{Beachte } \rho = \rho_i)$$

(für ein beliebiges Raumbereich V) für die Ladung, die sich durch Verschiebung aus dem Raumbereich entfernt hat. Für den Satz von Gauß folgt dann sofort

$$\text{div } \vec{P} = -\rho.$$

(Die Größe \vec{P} hat gegenüber ρ den Vorteil, dass diese Größe auch im homogenen Feld im Inneren des Isolators von Null verschieden ist).

Eine andere Betrachtungsweise geht davon aus dass das äußere elektrische Feld an den Atomen elektrische Dipole induziert, die sich durch ein lokales Dipolmoment $\vec{p}(\vec{r}) \, dV$ beschreiben lassen. Diese Vorstellung lässt sich mit einfachen nur mikroskopischen Materiemodellen in Verbindung bringen:

- (i) Atome kein Dipolmoment ohne äußeres Feld. Feld induziert Polarisation durch Ladungsverdrängung im Atom.
- (ii) Atome haben Dipolmoment, dessen Richtung aber ohne Feld statistisch gleichverteilt ist (thermische Fluktuationen). Feld richtet die Dipole aus: Orientierungspolarisation.

(iii) Bei hinreichend tiefen Temperaturen existieren bereits ausgeordnete Dipole (Ferroelektrikum);
Spontane Polarisation

Allen diesen mikroskop. Modellen gehen ein und in der Vorhandensein einer Polarisation $\vec{p}(\vec{r})$.
 Diese erzeugt am Punkt \vec{r} das elektrische Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \vec{p}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\ &= - \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \vec{p}(\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}' \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\ &\stackrel{p. I.}{=} - \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \vec{\nabla}' \cdot \left(\vec{p}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \\ &\quad + \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}') \\ &= - \vec{\nabla} \oint_{\partial V'} d\vec{f}' \cdot \vec{p}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} + \vec{\nabla} \int_{V'} d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \end{aligned}$$

Wähle V' innerhalb des makroskop. Körpers. Dann gilt $\vec{p}(\vec{r}') = 0$ auf $\partial V'$. Folglich gilt

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \left(\int d^3r' \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{p}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right)$$

und man kann $\rho_i = - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}(\vec{r})$ als implizite Ladungsquelle ansehen. Man beachte jedoch, daß die makroskopischen Maxwellgleichungen nicht das Resultat einer Multipolentwicklung sind sondern allgemein gelten.

Das Feld eines Punktdipols ergibt sich aus dem Potential $\phi_{\text{dip}}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$.
 Betrachte dazu zwei Ladungen $\pm q$ im Abstand d und dem Feld für $r \gg d$; $\vec{p} = q \cdot \vec{d}$ (Dipolmoment).

3.3. Einfache Materie modelle

3.3.1. Homogene Isolatoren

a) Ideale Elektrizum

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{P}(\vec{r}, t) = \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)}$

$\chi_e > 0$ Materialkonstante heißt
elektrische Suszeptibilität

$$\vec{M} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{H} = \vec{B}$$

$$\rho_i = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\chi_e \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\vec{J}_i = \partial_t \vec{P} = -\chi_e \partial_t \vec{E}$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} = \vec{E} + 4\pi \chi_e \vec{E}$$

$$\boxed{\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E}}$$

ϵ heißt Dielektrizitätskonstante

$$\boxed{\epsilon = 1 + 4\pi \chi_e}$$

χ_e, ϵ sind „Response“-größen, die die Reaktion der betrachteten Materie auf ein elektrisches Feld beschreiben. Wir haben hier stark vereinfachend angenommen, daß der Zusammenhang zwischen \vec{P} und \vec{E} zeitlich und räumlich lokal sind und χ eine Konstante ist!
Wir werden diese Konzepte später verallgemeinern.

b) Ideale magnetisierbare Material

$$\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{B}}$$

χ_m magn. Suszeptibilität

$$\vec{P} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{J}_i & = c \chi_m \text{ rot } \vec{B} & \text{Magnetisierungsstrom} \\ \rho_i & = 0 \end{cases}$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi \vec{M} = (1 - 4\pi \chi_m) \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$$

(historisch unglückliche Wahl!)

$$\boxed{\mu = \frac{1}{1 - 4\pi \chi_m}}$$

> 1 paramagnetisch *)
 < 1 diamagnetisch

$$\vec{D} = \vec{E}$$

μ heißt magn. Permeabilität
typisch $\mu \sim 1 \pm 0(10^{-6})$

Es gibt auch Materialien mit nicht-linearem
Zusammenhang zwischen \vec{B} und \vec{H}
 $\vec{B} = \vec{F}(\vec{H}) \rightarrow$ Hysterese.

*) $\mu > 1$ impliziert $\chi_m > 0$

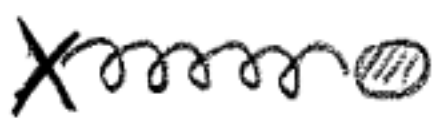
paramagnetisch $\chi_m > 0 \rightarrow \vec{M} \uparrow \uparrow \vec{B}$

diamagnetisch $\chi_m < 0 \rightarrow \vec{M} \uparrow \downarrow \vec{B}$

c) Einfach polarisierbares Kontinuum
(Lorentz-Drude-Modell)

Motivation

Betrachte eine Ansammlung von harmonisch gebundenen Ladungen

k Federkonstante + Dämpfung γ

 m, q (Masse, Ladung)

$$m \ddot{\vec{r}} = -k \vec{r} + q \cdot \vec{E} - m \gamma \dot{\vec{v}}$$

harmonisch gebunden
elektr. Kraft
Reibung (Dämpfung)

Sei n die Dichte der Ladungen, dann

$$\vec{J}_i = n q \vec{v} + \partial_t \vec{P}$$

$$\partial_t \vec{J}_i = n \left(-\frac{k}{m} \underbrace{q \vec{r}}_{\vec{d}} + \frac{q^2}{m} \vec{E} - \gamma q \vec{v} \right)$$

Dipolmoment

$$\vec{P} = n \cdot \vec{d} \quad \text{Polarisation}$$

$$+ \partial_t^2 \vec{P} = - \underbrace{\frac{k}{m}}_{= \omega_0^2} \vec{P} + \underbrace{\frac{n q^2}{m}}_{\equiv \omega_p^2 / 4\pi} \vec{E} - \gamma \partial_t \vec{P}$$

Eigenfrequenz Plasmafrequenz

$$\partial_t^2 \vec{P} + \gamma \partial_t \vec{P} + \omega_0^2 \vec{P} = \omega_p^2 \vec{E} / 4\pi$$

Diese Gleichung ist nun unser Modell eines einfach polarisierbaren Mediums, d.h. die konstituierende Gleichung. (Lorentz-Drude-Modell)

Fourieranalyse

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \vec{P}(\vec{k}, \omega)$$

Hier nur zeitliche Fouriertrafa, Modell
im lokal im Ort

$$-\omega^2 \vec{P}(\omega) - i\gamma\omega \vec{P}(\omega) + \omega_0^2 \vec{P} = \omega_p^2 \vec{E} / 4\pi$$

$$\chi(\omega) = \frac{\omega_p^2 / 4\pi}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \quad \text{komplexe Suszeptibilität!}$$

Statische Suszeptibilität

$$\chi(\omega=0) = \chi = \omega_p^2 / \omega_0^2 4\pi > 0$$

gültig falls $\omega_0 \gg \omega$ *)

Größenordnung von χ :

$\omega_0 \sim \frac{v}{l}$; atomare Bedw. und Länge (v, l)

$$\chi \sim \frac{nq^2 l^2}{m v^2} \sim \frac{nq^2 l}{m v^2} l^3$$

$$m v^2 \sim \frac{q^2}{l} \quad \text{kin. Energ.} \sim \text{Coulomb.}$$

$$\chi \sim n l^3$$

Anzahl der Elektronen in einem
atomaren Volumen

Daher hat man für dicke Materie

$$\chi \sim 1$$

*) Die Größenordnung der atomaren Frequenzen ω_0 erhält man aus den Frequenzen der emittierten Spektrallinien. Für sichtbares Licht ($\lambda \approx 6000 \text{ \AA}$) ergibt sich: $\omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot c \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$, statische Näherung ist daher gültig für Radio- und Radarwellen, nicht aber für Licht und Röntgenwellen.

```

In[55]:= ga = 0.25
f = (1 - x^2) / ((1 - x^2)^2 + (ga * x)^2)
g = ga x / ((1 - x^2)^2 + (ga * x)^2)
graf := Plot[f, {x, -3, 3}, DisplayFunction -> Identity]
grag := Plot[g, {x, -3, 3}, DisplayFunction -> Identity]
Show[graf, grag, DisplayFunction -> $DisplayFunction]

```

$$ga = \hat{f}$$

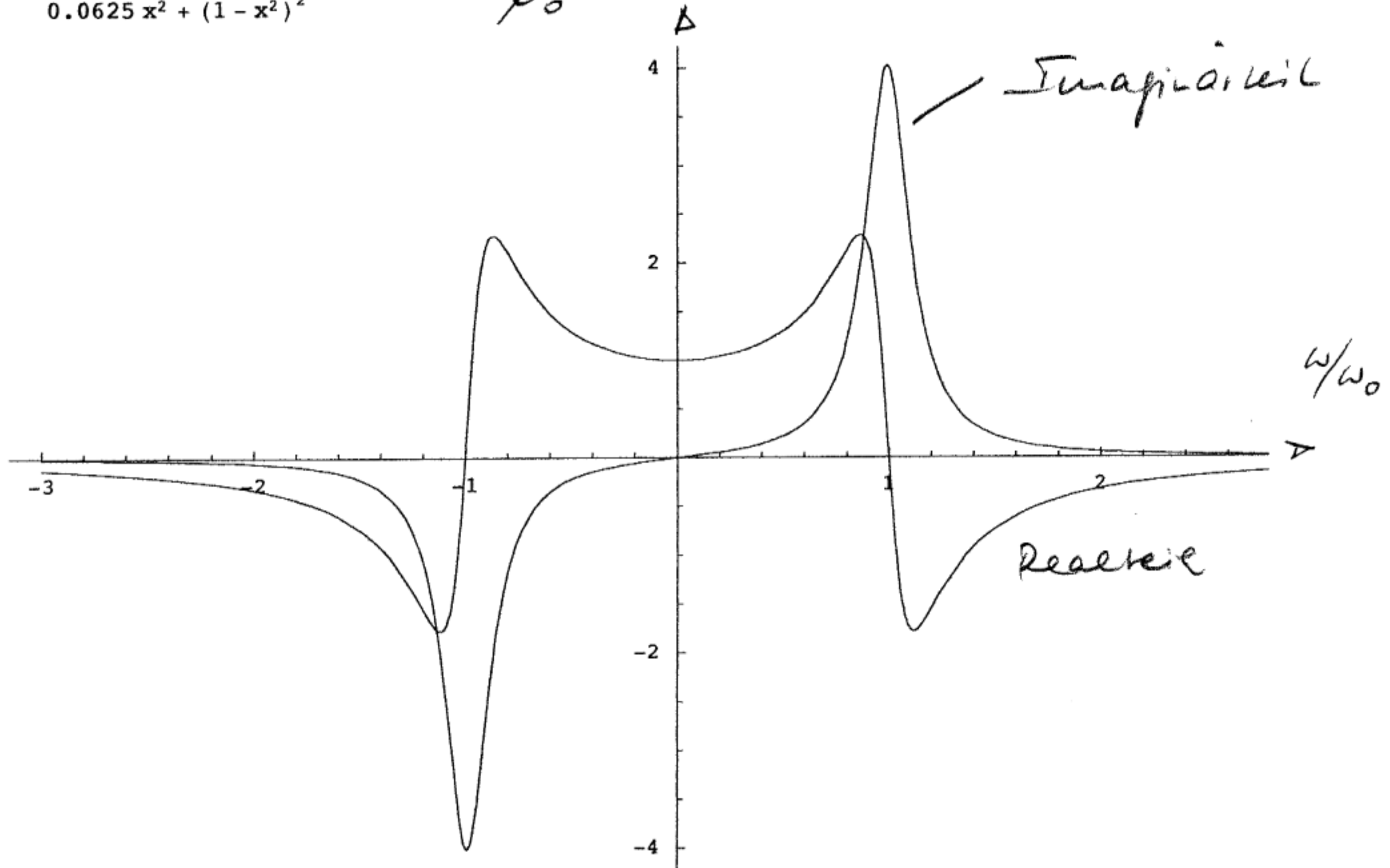
$$x = \hat{\omega}$$

Out[55]= 0.25

Out[56]=
$$\frac{1 - x^2}{0.0625 x^2 + (1 - x^2)^2}$$

Out[57]=
$$\frac{0.25 x}{0.0625 x^2 + (1 - x^2)^2}$$

Re x, Im x
 χ_0



Out[60]= - Graphics -

Skizze von Real- und Imaginärteil von χ

$$4\pi\chi = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

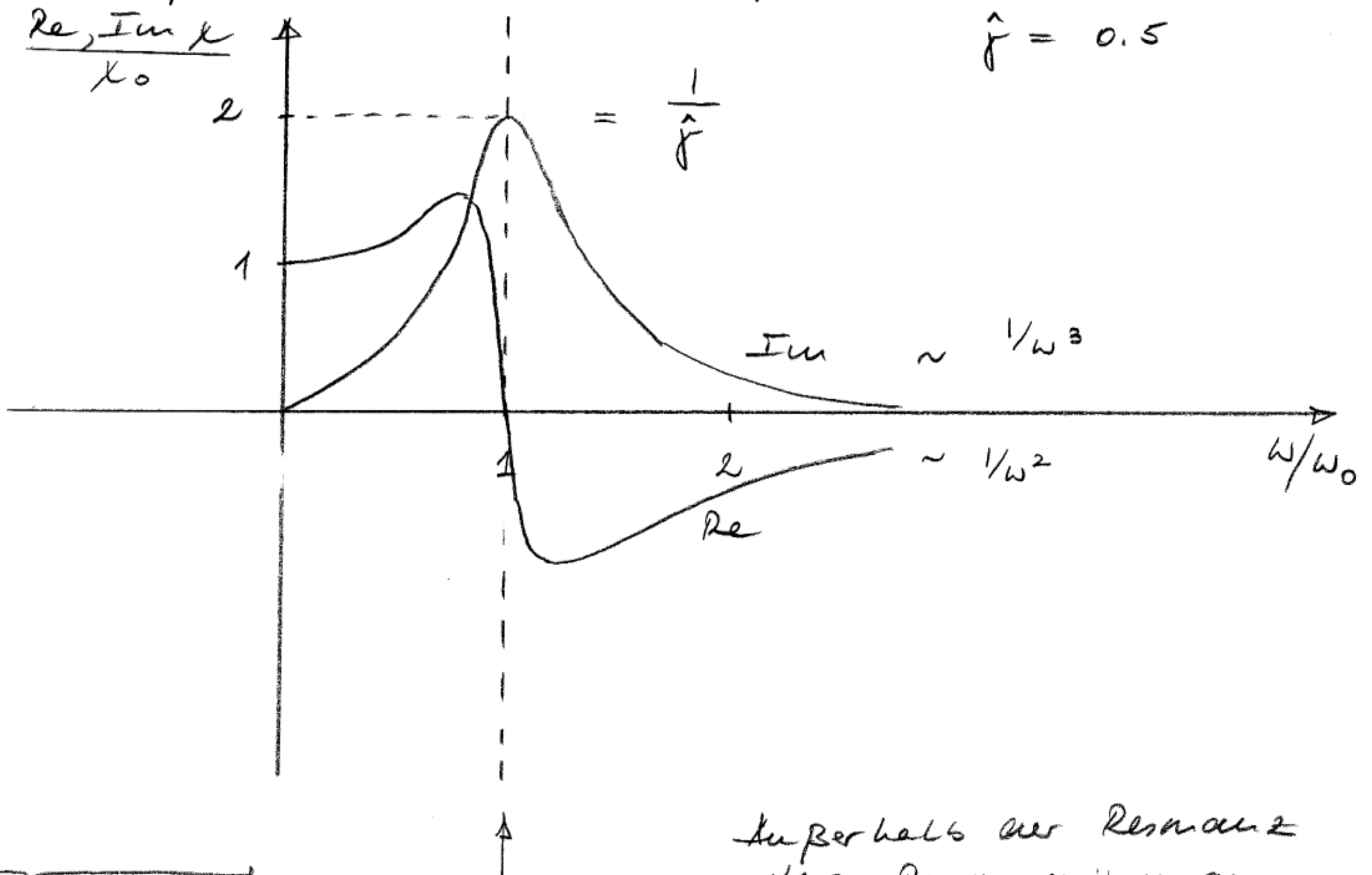
$$4\pi \operatorname{Re} \chi = \frac{\omega_p^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = (4\pi\chi_0) \frac{1 - \hat{\omega}^2}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + (\hat{\gamma}\hat{\omega})^2}$$

$$4\pi \operatorname{Im} \chi = \frac{\omega_p^2 \gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = (4\pi\chi_0) \frac{\hat{\gamma}\hat{\omega}}{(1 - \hat{\omega}^2)^2 + (\hat{\gamma}\hat{\omega})^2}$$

wobei $\hat{\omega} = \omega/\omega_0$ und $\hat{\gamma} = \gamma/\omega_0$ die Frequenz und Dämpfung in Einheiten der atomaren Frequenz sind; $4\pi\chi_0 = (\omega_p/\omega_0)^2$ ist die statische Suszeptibilität; $\chi_0 = \chi(\omega=0)$.

Realteil ist sym. in ω .

Imaginärteil ist anti-sym. in ω .



folgt aus
Symmetrie

Resonanz

Außerhalb der Resonanz steigt $\operatorname{Re} \chi$ mit ω an; dies bezeichnet man als normale Dispersion. In der Nähe der Resonanz hat man anomale Dispersion ($\chi \downarrow$ mit $\omega \uparrow$)

Verallgemeinerung

Im Volumen V befinden sich eine Dichte n von Molekülen mit jeweils Z Elektronen. Daran haben f_j die Bindungsfrequenz (Eigenfrequenz) ω_j und die Dämpfungskonstante γ_j .

$$\begin{aligned}\vec{P} &= n \frac{e^2}{m} \sum_j f_j (\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega)^{-1} \vec{E} \\ &= \chi_e \vec{E}\end{aligned}$$

Dann gibt für die frequenzabhängige DK

$$\begin{aligned}\epsilon(\omega) &= 1 + 4\pi \chi_e(\omega) \\ &= 1 + \underbrace{\frac{4\pi n e^2}{m}}_{= \omega_p^2} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j \omega}\end{aligned}$$

Lorentz-Drude Formel

Es gilt der f -Summensatz $\sum_j f_j = Z$
 f_j heißt Oszillationsstärke.

Mit einer geeigneten quantenmechanischen Definition der Parameter f_j , γ_j , ω_j liefert die Lorentz-Drude Formel eine gute Beschreibung des atomaren Beitrags zur Dielektrizitätskonstante (DK) $\epsilon(\omega)$.

Diskussion der Lorentz-Drude Formel

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon^*(-\omega)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Re } \varepsilon(\omega) \text{ gerade} \\ \text{Im } \varepsilon(\omega) \text{ ungerade} \end{array} \right\} \text{ in } \omega$$

In allgemeinen gibt $\gamma_j \ll \omega_j$

$$\omega_j^2 - \omega^2 > 0 \quad \text{für } \omega < \omega_j$$
$$< 0 \quad \text{für } \omega > \omega_j$$

↗ Für kleine Frequenzen ω , unterhalb der kleinsten Frequenz ω_j , tragen alle Terme in der Summe mit positivem Vorzeichen bei $\Rightarrow \varepsilon(\omega) > 1$.

Passiert man mit steigendem ω aufeinander folgende Eigenfrequenzen ω_j so treten in der Summe immer mehr negative Terme auf bis schließlich die gesamte Summe negativ und damit $\varepsilon(\omega) < 1$ wird. In der näheren Umgebung der Eigenfrequenzen ω_j ändern sich $\varepsilon(\omega)$ stark (Bei ω_j verschwindet der Realteil und der Imaginärteil wird maximal)

Normale Dispersion: $\varepsilon(\omega)$ steigt mit ω

Anomale Dispersion: $\varepsilon(\omega)$ fällt mit ω

Anomale Dispersion findet man typisch in der Nähe von Resonanzen.

Niederfrequenzverhalten ; $\omega \rightarrow 0$

Fall alle $\omega_j \neq 0$, dann

$$\epsilon(0) = 1 + \omega_p^2 \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2} \equiv \epsilon_0$$

(Stattdes DK)

Falls ein $\omega_j = 0$ (siehe Drude Modell für Leiter)

dann würde $\epsilon(\omega) \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow 0$

Sei f_0 Anteil der ungebundenen Elektronen mit $\omega_0 = 0$, dann gilt für niedrige Frequenzen

$$\begin{aligned} \epsilon(\omega) &= \epsilon_0 + \underbrace{i \omega_p^2 \frac{f_0}{\gamma_0 - i\omega}}_{\text{freie Elektronen}} \\ &= \epsilon_0 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \end{aligned}$$

Hochfrequenzverhalten

$$\epsilon(\omega) \rightarrow 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \underbrace{\sum_j f_j}_{=Z}$$

$$= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

$$\omega_p^2 = 4\pi \frac{nZe^2}{m} \quad \text{Plasmafrequenz}$$

nZ = Ladungsdichte aller Elektronen

3.3.2. Homogene Leiter

(a) Ideales Metall

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{E} = 0}$

(Motivation: frei bewegliche Ladungen)

Aus den Maxwellgleichungen folgen wir dann:

• Coulomb: $\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi (\rho_e + \rho_i) = 0$

$$\leadsto \rho_e = -\rho_i$$

d.h. die induzierten Ladungen kompensieren die externen Ladungen
(ideale Ladungskompensation)

• Faraday: $\partial_t \vec{B} = 0$

d.h. statisches Magnetfeld

(b) Ohmscher Leiter

Konstituierende Gleichung $\boxed{\vec{j}_i = \sigma \vec{E}(\vec{x}, t)}$

$\sigma > 0$ misst die elektrische Leitfähigkeit

Hier haben wir angenommen, dass das Magnetfeld keine Rolle spielt; siehe aber Hall-Effekt.

Um Strome in einem stromlosen Leiter aufrecht zu erhalten braucht man externe Quellen (Batterie, zeitlich veränderlicher magnetischer Fluss (Dynamo), ...).

Sie definieren

$$\vec{E}^{(e)} := \frac{1}{\sigma} \vec{j}_e$$

so daß $q \cdot (\vec{E} + \vec{E}^{(e)})$ die auf eine Ladung q wirkende Gesamtkraft ist, unabhängig von der Art der Quelle q ist (nur $\vec{E} = 0$)

$$\oint (\vec{E} + \vec{E}^{(e)}) d\vec{l} = \oint \vec{E}^{(e)} d\vec{l} = \mathcal{E}$$

Man bezeichnet \mathcal{E} als „elektromotorische Kraft“ um auszudrücken, daß $\vec{E}^{(e)}$ der Antrieb („Motor“) für den Stromfluß im Leiter ist.

Innerhalb einer idealen Quelle für eine elektromotorische Kraft gibt wegen $\sigma = \infty$ daß die Gesamtkraft auf eine Ladung Null ist: $\vec{E} = -\vec{E}^{(e)}$. Damit folgt für die Spannungsdifferenz zwischen den Polen (der Batterie)

$$V = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}^{(e)} \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint \vec{E}^{(e)} \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

da $\vec{E}^{(e)} = 0$
außerhalb der Quelle (Batterie)

Wir untersuchen nun die Folgerungen des Energieerhaltungssatzes für stromschie Leiter

$$\frac{d}{dt} U = - \underbrace{\int \vec{S} \cdot d\vec{f}}_{\text{Abstrahlung}} - \underbrace{\int (\vec{j}_i + \vec{j}_e) \cdot \vec{E} dV}_{\text{abgegebene Leistung an Materie}} = q_i(x, t)$$

\uparrow
 zeitliche Änderung der Feldenergie

$$\left(\int \vec{j}_e \cdot \vec{E} dV + \int \vec{j}_i \cdot \vec{E} dV \right)$$

abgegebene Leistung an Materie
 = $q_i(x, t)$

$$q_i(x, t) := - \vec{j}_i(\vec{x}, t) \cdot \vec{E}(x, t)$$

$$= - \sigma^2 \vec{E}^2 < 0$$

\uparrow
 Ohm'sches Gesetz

d. h. ein Metall entzieht dem elem. Feld Energie („ohmsche Verluste“).

(c) Drude Modell

Ladungen in einem bestanden elektr. Feld werden beschleunigt. Die Geschwindigkeitsänderung in einem Zeitintervall Δt ist

$$\Delta v = \frac{q}{m} E \Delta t$$

Dies gibt aber nur Aussage bis die Elektronen im Metall Stöße mit den Gitterrümpfen erleiden. Die mittlere Flugzeit zwischen zwei Stößen bezeichnen wir mit τ . Sie ergibt sich aus der mittleren freien Weglänge l und der (typischen) thermischen Geschw. v_{therm} zu: $\tau = l / v_{\text{therm}}$.

Damit ergibt sich für die (zeitgemittelte) Zunahme der Geschwindigkeit $v_D = \frac{1}{\tau} \int \Delta v dt$

$$v_D = \frac{q \cdot \tau}{2m} E \quad \text{Driftgeschwindigkeit}$$

und folglich gibt für $j = n q v_D$

$$j = \frac{n q^2 \tau}{2m} E \equiv \sigma E \quad (**)$$

also das Ohmsche Gesetz.

*) Man beachte, dass Elektronen im Metall nicht in Reihe mit sondern eine Wärmebewegung vollführen.

***) Wegen $\sigma \sim 1/v_{\text{therm}}$ nimmt σ mit steigender Temperatur ab.

Abschätzung für τ

$$\text{Cu (20°C)} \quad \sigma = 5,4 \cdot 10^{17} \text{ sec}^{-1}$$

$$n \approx 10^{23} \text{ cm}^{-3}$$

$$m = 9 \cdot 10^{-28} \text{ g}$$

$$e = 5 \cdot 10^{-10} \text{ esu}$$

$$\downarrow \tau \approx 4 \cdot 10^{-14} \text{ sec}$$

Man erwartet also, daß das Ohmsche Gesetz bis zu Frequenzen der Größenordnung $\omega \sim 10^{14} \text{ Hz}$ gilt. Die ist für Radio- und Radarquellen sicher erfüllt, nicht aber für Licht- und Röntgenquellen. Für hohe Frequenzen tritt der Dämpfungsmechanismus durch Stöße nicht in Aktion. Stattdessen findet man für ein zeitlich veränderliches elektrisches Feld

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

$$m \ddot{\vec{x}} = q \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$$

und folglich mit dem Ansatz $\dot{\vec{x}} = \vec{v}_D \sim e^{-i\omega t}$

$$\vec{v}_D = \frac{q}{-im\omega} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{nq^2}{-im\omega} \vec{E} \quad ; \quad \sigma = i \frac{nq^2}{m\omega} = i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi nq^2}{m} \quad \text{Maxwell Plasmafrequenz}$$

$$\approx 2 \cdot 10^{16} \text{ Hz (fernes UV)} \quad \text{für Festkörper}$$

Verallgemeinerung (Drude Formel)

Konstituierende Gleichung

$$\partial_t \vec{j} + \underbrace{\frac{2}{\tau} \vec{j}}_{\text{Dämpfung}} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E} \quad (*)$$

↑ Stärke der Kopplung

Zwei Materialparameter

τ : Relaxationszeit / Dämpfung

ω_p : Kopplungsstärke

Fourieranalyse

$$\vec{E}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{j}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{j}(\omega)$$

Dann ergibt sich aus (*)

$$(-i\omega + \frac{2}{\tau}) \vec{j}(\omega) = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{j}(\omega) = \frac{\omega_p^2 / 4\pi}{-i\omega + 2/\tau} \quad (\text{Drude Formel})$$

$$\rightarrow \begin{cases} +i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} & \tau\omega \gg 1 \\ \frac{\omega_p^2 \tau}{4\pi \cdot 2} = \frac{nq^2 \tau}{2m} & \tau\omega \ll 1 \\ & = \sigma_0 \quad (\text{statische Leitfähigkeit}) \end{cases}$$

Uminterpretation des Hochfrequenzverhaltens

Aus der Drude-Formel folgt für hohe Frequenzen $\omega \tau \gg 1$

$$j(\omega) = \underbrace{i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega}}_{\sigma(\omega)} E(\omega)$$

Wir schreiben nun $j(\omega)$ nun als

$$j(\omega) = n q v(\omega) = n q (-i\omega) x(\omega)$$

Dann gilt für $P(\omega) = n q x(\omega)$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= i \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega} \cdot \frac{1}{(-i\omega)} E(\omega) \\ &= - \frac{\omega_p^2}{4\pi\omega^2} E(\omega) \end{aligned}$$

Dies ist identisch mit dem Hochfrequenzverhalten des Lorentz-Drude-Modells. Bei hohen Frequenzen können wir also die Reaktion des Mediums sowohl als Leitfähigkeit als auch als Suszeptibilität auffassen:

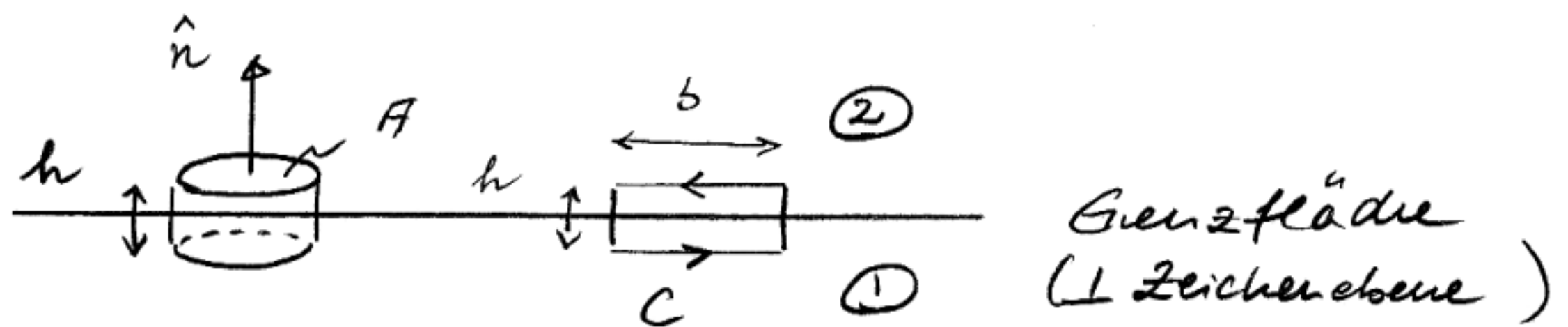
$$\chi(\omega) \leftrightarrow \sigma(\omega) / (-i\omega)$$

3.4. Grenzflächen und Randbedingungen

Wie verhalten sich elektromagnetische Felder beim Übergang zwischen makroskopischen Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften? Häufig ändern sich die Materialeigenschaften auf Längenskalen, die kurz sind im Vergleich zur räumlichen Variation der elem. Felder. Dann lassen sich die Grenzflächen als Unstetigkeitsflächen für die Materialparameter idealisieren.

Wir betrachten zunächst die homogenen Maxwellgleichungen in integraler Form

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \quad ; \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \partial_t \int \vec{B} \cdot d\vec{f}$$



Für den magnetischen Fluss durch die „Dose“ mit Deck- und Bodenfläche tangential zur Grenzfläche gilt für $h \rightarrow 0$ und infinitesimale A

$$0 = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}^{(2)} \cdot \hat{n} A - \vec{B}^{(1)} \cdot \hat{n} A$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{B} \cdot \hat{n} = B_n \text{ stetig}}$$

Die Normalkomponente der magnetischen Felder \vec{B} ändern sich nicht beim Übergang zwischen Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften. Dies gilt unabhängig davon ob die Grenzfläche eine physikalische oder nur eine gedachte mathematische Grenzfläche ist.

Betrachten wir nun die Zirkulation des \vec{E} -Feldes entlang einer rechteckigen Schleife C (siehe Figur), wieder im Limes $h \rightarrow 0$ und infinitesimaler Breite b :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{e} = (\vec{E}^{(2)} \cdot \hat{t} - \vec{E}^{(1)} \cdot \hat{t}) \cdot b + \mathcal{O}(h)$$

$$= - \int \vec{B} \cdot d\vec{f} = b \mathcal{O}(h)$$

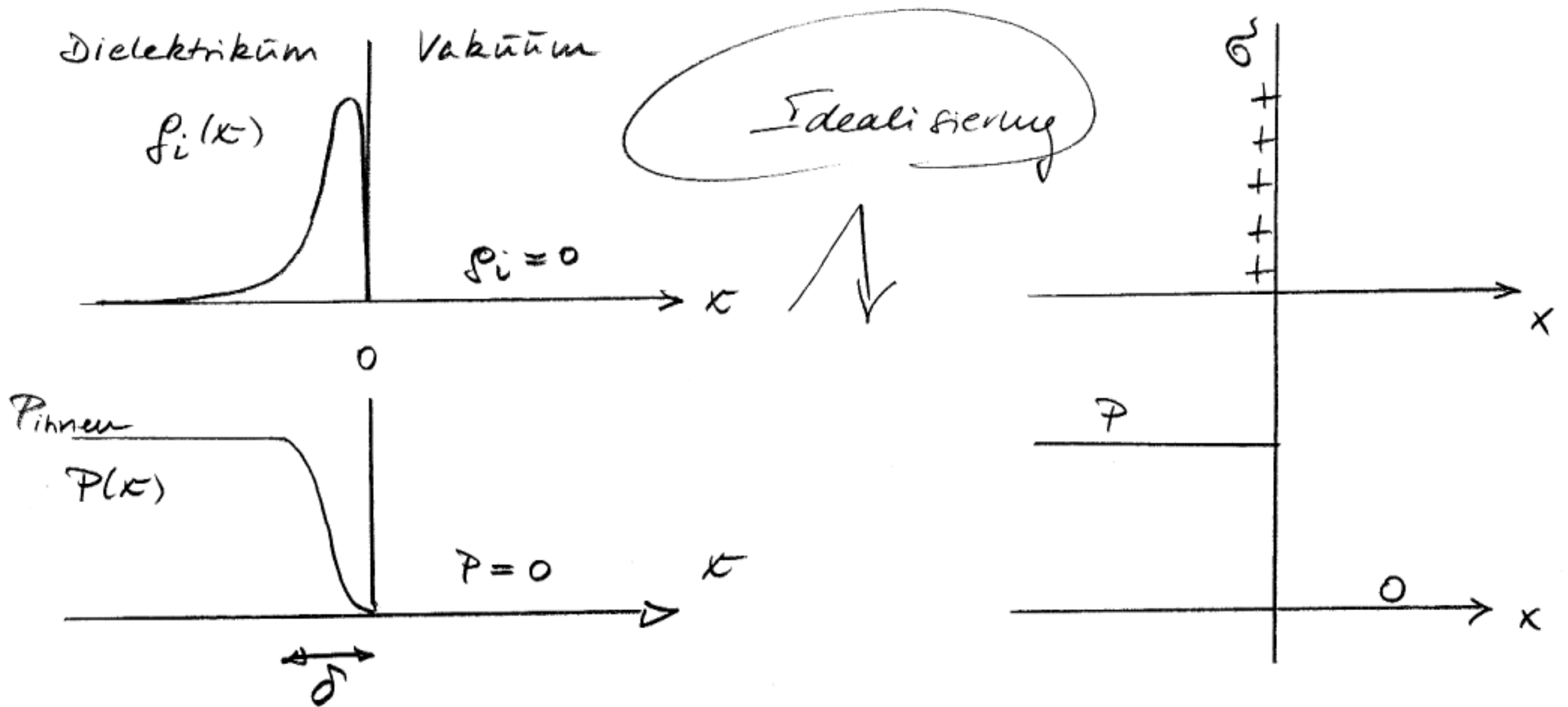
(hier ist \hat{t} ein Tangentialvektor an die Grenzfläche)

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} \cdot \hat{t} = E_t \text{ stetig}}$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes \vec{E} ist stetig an physikalischen oder auch mathematischen Grenzflächen.

Als nächstes untersuchen wir die inhomogenen Maxwellgleichungen. Um aus ihnen Folgerungen über das Verhalten von \vec{D} und \vec{H} abzuleiten müssen wir uns zunächst ein Bild von der räumlichen Variation der induzierten (gebundenen) Ladungen und Ströme machen.

Dazu betrachten wir als einfaches Beispiel den Übergang von einem homogenen Dielektrikum zum Vakuum. Dann erwartet man, daß die durch ein äußeres elektrisches Feld induzierte relative Verschiebung zwischen positiven und negativen Ladungen zu einer Oberflächenladung im Dielektrikum führt (\rightarrow Figur).



über $\rho_i(x) = -\frac{\partial}{\partial x} P(x)$ (Annahme: ebene homogene Grenzfläche) kann man die Polarisation aus der scharf gepeakten induzierten Ladungsdichte berechnen (\rightarrow Figur): $P(x)$ fällt von einem konstanten Wert im Dielektrikum innerhalb einer Randschicht auf den Wert Null ab. Sei nun δ die Dicke dieser Randschicht. Dann

$$\underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta} dx \rho_i(x)}_{= \sigma} = - \underbrace{\int_{-\delta}^{+\delta} dx \frac{\partial}{\partial x} P(x)}_{= -P_{\text{außen}} + P_{\text{innen}} = 0}$$

Gesamtladung (pro Fläche) in der Randschicht
 = Oberflächenladungsdichte

Sprung in der Polarisation beim Übergang von Dielektrikum ins Vakuum

$$\boxed{P_{\text{innen}} = \Delta P = \sigma}$$

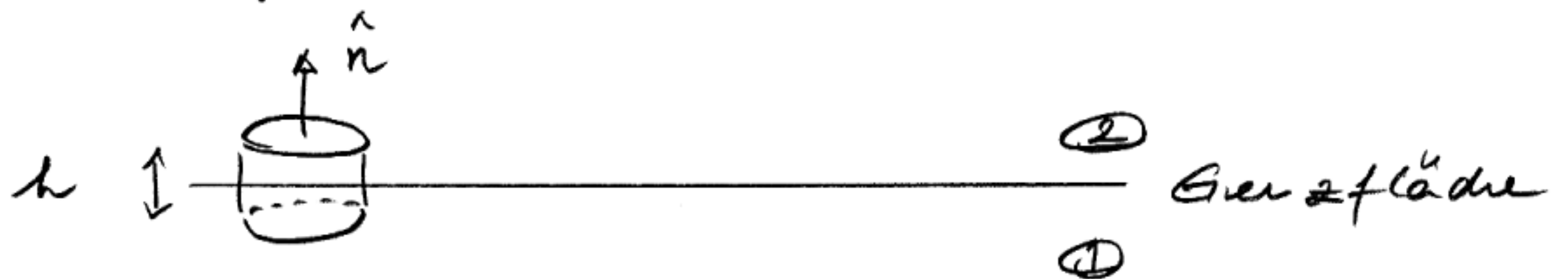
Der Sprung in der Polarisation = Oberflächenladungsdichte.

Idealisierung: $\delta \rightarrow 0$ (\rightarrow Figur)
 (Wiederum gilt, daß diese Idealisierung gültig ist wenn \vec{E}, \vec{D} langsam variieren im Vergleich zu den Materialeigenschaften!)

Betrachte nun das Coulomb'sche Gesetz in integraler Form

$$\oint_F \vec{D} \cdot d\vec{f} = 4\pi \int_{\partial V} \rho_e dV = Q \cdot 4\pi$$

wobei Q die von der Fläche $F = \partial V$ umschlossene Gesamtladung ist.



Es folgt für die "Dose" analog zu unseren früheren Überlegungen:

$$D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi \rho_e \cdot h$$

Falls ρ_e endlich ist, dann gilt im Limes $h \rightarrow 0$

$$\underline{D_n \text{ stetig}}$$

In den meisten praktisch relevanten Fällen ist D_n numerisch nicht viel größer als $10^5 \frac{esE}{cm^2}$, während die Dichte der frei beweglichen Ladungen in Metallen von der Ordnung $10^{13} esE cm^{-3}$, so daß man in vielen Fällen eine extreme Unstetigkeit in D_n über Distanzen von der Ordnung $\lesssim 10^{-10} m$ oder 1 \AA hat.

Daher ist es bei der Diskussion von Metallen notwendig

$$\underline{D_n^{(2)} - D_n^{(1)} = 4\pi \sigma_e}$$

zu schreiben, wobei σ_e die frei bewegliche Oberflächenladungsdichte ist.

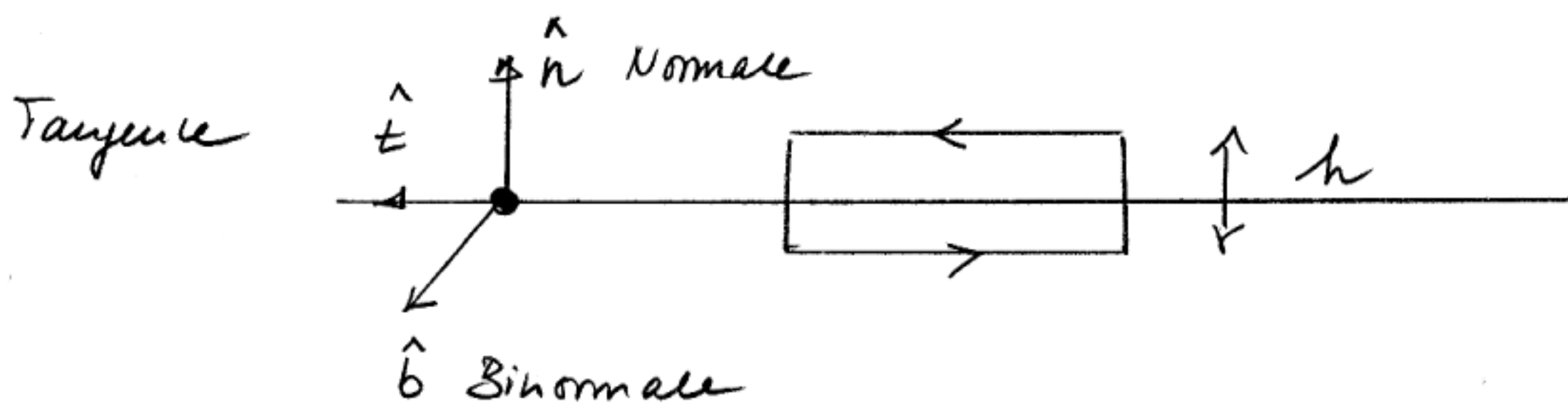
Bemerkung: In Halbleitern ist die bewegliche Ladungsdichte viel geringer als in Metallen, und die Tiefe der Verarmungszone an der Oberfläche kann, wie in Feldeffekttransistoren, makroskopische Dimensionen annehmen. Es ist dann nicht mehr gerechtfertigt von einer Oberflächenladungsdichte zu sprechen.

Als nächstes untersuchen wir das Ampere-Maxwell Gesetz für makroskopische Medien:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \cdot d\vec{l} + \frac{1}{c} \int \dot{\vec{D}} \cdot d\vec{l}$$

Rechteckige Schleife $d\vec{l} = dl \cdot \vec{b} = dl (\hat{n} \times \hat{t})$

$$\sim H_t^{(2)} - H_t^{(1)} = \left(\frac{4\pi}{c} j_b + \frac{1}{c} \partial_t D_b \right) \cdot h$$



bei \dot{D}_b nicht singular ist führt dies im Limes $h \rightarrow 0$ auf

H_t stetig

falls \vec{j} ebenfalls nicht singular ist.

Nebenrechnung: $\vec{j} \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) = \vec{j} \cdot \vec{b} = j_b$
 Strom \perp Schleife, in der
 Tangentialebene

In statischen Problemen kann der Strom \vec{j} in Supraleitern von Null verschieden sein. Dann kann sich der Strom auch in makroskopisch kleinen Oberflächenschichten beträchtlich ändern, so daß es sinnvoll ist einen Oberflächenstrom \vec{I}_b einzuführen:

$$\vec{H}_z^{(2)} - \vec{H}_z^{(1)} = \frac{4\pi}{c} \vec{I}_b.$$

Bei hoher Frequenzen sind die Ströme an der Oberfläche von Metallen (siehe später) auf eine kleine Oberflächenschicht beschränkt (\rightarrow Skintiefe), die zwar nicht makroskopisch infinitesimal aber klein im Vergleich zu anderen Längenskalen ist. Dann gilt $\vec{H}_z^{(2)} = 0$ innerhalb des Metalls und wir bekommen:

$$\vec{H}_z^{(1)} = - \frac{4\pi}{c} \vec{I}_b$$

wobei wir die Region in der Nähe von der Metalloberfläche aus den Betrachtungen ausklammern.

3.5. Allgemeine Materialgleichungen

\vec{E} und \vec{B} induzieren \vec{P} und \vec{M} :

$$\boxed{\vec{P}[\vec{E}, \vec{B}]; \vec{M}[\vec{E}, \vec{B}]}$$

d.h. \vec{P} und \vec{M} hängen funktional von \vec{E} und \vec{B} ab. Wie diese Abhängigkeit im einzelnen beschaffen ist, läßt sich in der Regel nur aus (mikroskop.) Materialmodellen ableiten. Dazu sind Konzepte aus der Mechanik, Quantenmechanik und statistischer Physik notwendig. Einige einfache Materialmodelle haben wir bereits kennengelernt. In folgendem wollen wir allgemeine Eigenschaften ansetzen, wobei wir uns auf den Fall der linearen Antwort eines Mediums beschränken wollen.

Wir nehmen an, daß \vec{P} nur ein Funktional von \vec{E} ist und entwickeln es eine funktionale Taylorreihe

$$\vec{P}[\vec{E}] = \underbrace{\vec{P}[\vec{0}]}_{\text{spontane Polarisation}} + \underbrace{\vec{P}_L[\vec{E}]}_{\substack{\text{induzierte} \\ \text{Polarisation} \\ \text{(lineare Funktional)}}} + \underbrace{\mathcal{O}(E^2)}_{\text{nichtlineare Effekte}}$$

Betrachte nun die lineare Antwort des makroskopischen Systems weiter (und lasse den Index „L“ fallen).

Dann gilt allgemein

$$P_i(\vec{x}, t) = \int d^3x' \int dt' \chi_{ij}^e(\vec{x}, \vec{x}', t, t') E_j(\vec{x}', t')$$

χ_{ij}^e heisst dielektr. Suszeptibilitätstensor
funktionaler (Tensor!)

Mit diesem allgemeinen Zusammenhang zwischen elektrischem Feld und Polarisation hat man eine sowohl zeitlich wie räumlich nicht lokale Antwort des Mediums auf das äussere Feld.

Fall Symmetrie vorliegen, läßt sich diese Abhängigkeit reduzieren:

Homogenität in der Zeit: $\chi_{ij}^e(\vec{x}, \vec{x}'; t - t')$

+ Homogenität des Materials: $\chi_{ij}^e(\vec{x} - \vec{x}'; t - t')$

+ Isotropie: $\chi_{ij}^e(\dots) = \chi(\dots) \delta_{ij}$

In manchen Fällen läßt sich auch noch die räumliche oder / und die zeitliche Nichtlokalität vernachlässigen. Hier betrachten wir den räumlich lokalen Fall. Dann gilt:

$$\vec{P}(\vec{x}, t) = \int dt' \chi^e(t - t') \vec{E}(\vec{x}, t')$$

(Wir heben hier auch an, dass das Medium dielektrisch isotrop ist)

*) Summenkonventionen gilt, d.h. über j wird summiert.

Diese Faltungsintegrale konvergieren sich im Fourierraum zu

$$\boxed{\vec{P}(\vec{r}, \omega) = \chi^e(\omega) \cdot \vec{E}(\vec{r}, \omega)}$$

Kausalität $\chi(t-t') \equiv 0$ für $t-t' < 0$

$\Rightarrow \chi(z)$ analytisch in der oberen Halbebene!

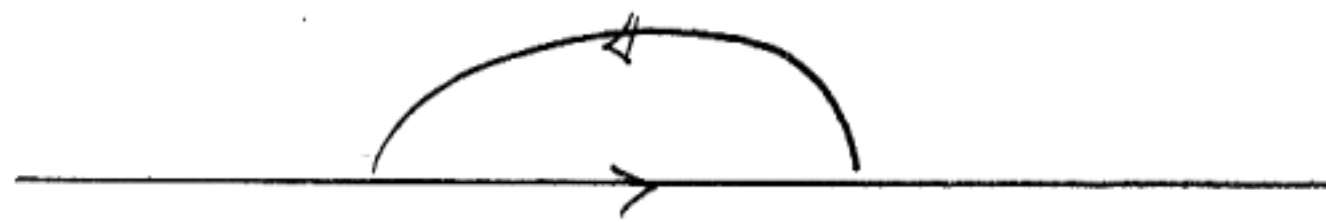
Bew: $\chi(t)$ ist nur für $t > 0$ verschieden von Null und dort endlich. Dann garantiert

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_0^{\infty} dt e^{izt} \chi(t) \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{i\operatorname{Re}(z)t} e^{-\operatorname{Im}(z)t} \chi(t) \end{aligned}$$

der Faktor $e^{-\operatorname{Im}(z)t}$ die Konvergenz des Fourierintegrals für $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Nach dem Cauchy-Integralsatz gibt dann für $z \in$ obere HE

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz' \frac{\chi(z')}{z' - z}$$



Definition der Fouriertransformation:

$$f(\vec{k}, \omega) = \int d^3r \int dt e^{i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}, t)$$

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}} f(\vec{k}, \omega)$$

Setze voraus, dass $\chi(z)$ im ∞ stark genug abfällt, so dass der Halbkreis nicht beiträgt.

$$\chi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - z}$$

Für reelle z folgt

$$\chi(\omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \chi(\omega + i\varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon} =$$

$$= \int \frac{d\omega'}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi \delta(\omega' - \omega) \right] \chi(\omega')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \chi(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}$$

Daraus folgen die Dispersions-Relationen
(Kramers-Kronig Relationen)

$$\operatorname{Re} \chi(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\operatorname{Im} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} ,$$

$$\operatorname{Im} \chi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{\operatorname{Re} \chi(\omega')}{\omega' - \omega} .$$

→ Linear Response Theorie
Theorie der linearen Antwort
(Statistische Mechanik)

\mathcal{P} bezeichnet das Hauptwertintegral. Es ist definiert durch

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega f(\omega) = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ R \rightarrow \infty}} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} d\omega f(\omega) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} d\omega f(\omega) \right]$$

\mathcal{P} steht für "principal value".

3.6. Energieerhaltungssatz in Materie

Völlig analog zu den Überlegungen in Abschnitt 2.4. findet man für lineare Medien:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} + \vec{H}) \quad \text{Poynting Vektor}$$

$$u = \frac{1}{8\pi} (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) \quad \text{Energiedichte}$$

\vec{j} sind die extern angeprägten Ströme

$$\int \vec{j} \cdot \vec{E} dV \stackrel{\text{Ampere Maxwell}}{=} \int \frac{c}{4\pi} (\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{D}) \cdot \vec{E} dV$$

$$= \int \frac{c}{4\pi} \left[\underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot \vec{E}} - \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$= \int \frac{c}{4\pi} \left[\vec{H} (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) - \frac{1}{c} \vec{E} \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$\stackrel{\text{Faraday}}{=} \int \frac{c}{4\pi} \left[-\vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \cdot \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \vec{E} \partial_t \vec{D} \right] dV$$

$$= - \int \frac{c}{4\pi} \vec{\nabla} (\vec{E} \times \vec{H}) dV - \frac{1}{4\pi} \int (\vec{H} \cdot \partial_t \vec{B} + \vec{E} \partial_t \vec{D}) dV$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} - \oint \vec{S} \cdot d\vec{f} - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{c} \partial_t \int (\vec{H} \cdot \vec{B} + \vec{E} \cdot \vec{D}) dV$$

gibt nur für lineare Medien

4. FREIE WELLEN

4.1. Lineare Feldgleichungen

Wir betrachten eine allgemeine Feldtheorie mit N Feldern $F_\beta(\vec{x}, t)$; $\beta = 1, 2, \dots, N$ und \vec{x} ein d -dimensionaler euklidischer Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$. Die Feldgleichungen seien linear in den Feldern F_β :

$$(*) \quad \sum_{\beta=1}^N C_{n_0 \dots n_d}^{\alpha\beta} \partial_t^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_\beta(\vec{x}, t) = \underline{I}^\alpha(\vec{x}, t)$$

Die Zahl der Feldgleichungen sei M ; $\alpha = 1, \dots, M$. \underline{I}^α heißt Quelle oder Inhomogenität der linearen Feldgleichungen.

Maxwellgleichungen:

6 Felder: $\vec{E}, \vec{B} \rightsquigarrow N = 6$

Die Maxwellgleichungen ergeben 8

Gleichungen vom Typ (*) $\rightsquigarrow M = 8$

Raumdimension ist $d = 3$

(Lösungen)

Unter freier Wellen versteht man Lösungen von (*) mit $\underline{I}^\alpha(\vec{x}, t) \equiv 0$ für $\alpha = 1, \dots, M$.

Wir suchen nun nach speziellen Lösungen von (*) und machen den Lösungsansatz

$$F_\beta(\vec{x}, t) = F_\beta^0 e^{i\varphi(\vec{x}, t)}; \quad \varphi(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

F_{β}° Amplitude
 φ Phase

Nur setzen diesen Lösungsansatz in (*) ein:

$$\partial_x F_{\beta}(\vec{x}, t) = F_{\beta}^{\circ} e^{i\varphi} (ik_x)$$

$$\partial_t F_{\beta}(\vec{x}, t) = F_{\beta}^{\circ} e^{i\varphi} (-i\omega)$$

i.e. $\partial_x \rightarrow ik_x$; $\partial_t \rightarrow -i\omega$ *)

Dann erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit N unbekannt Amplituden F_{β}° und M Gleichungen

$$\sum_{\beta=1}^N \underbrace{C_{n_0 \dots n_d}^{\alpha\beta} (-i\omega)^{n_0} (ik_1)^{n_1} \dots (ik_d)^{n_d}}_{M \times N \text{ Matrix}} F_{\beta}^{\circ} = 0$$

(\rightarrow Standard sätze und -methoden für Lösung linearer Gleichungssysteme)

Fall $\omega = \omega_R + i\omega_I$ ($\omega_R, \omega_I \in \mathbb{R}$)

dann $|F_{\alpha}| = \underbrace{|F_{\alpha}^{\circ} e^{i\vec{k}\vec{x}}|}_{\text{zeitlich konstant}} \underbrace{e^{\omega_I t}}_{\text{exponentiell}}$

und analog für $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$

$$|F_{\alpha}| = |F_{\alpha}^{\circ} e^{-i\omega t}| e^{-\vec{k}_I \cdot \vec{x}}$$

*) Beispiele:

Sei f ein skalares Feld mit $f = f_0 e^{i\varphi}$. dann

gilt $\text{grad } f = i\vec{k} f$. Fall $\vec{A} = \vec{A}_0 e^{i\varphi}$, dann

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = i\vec{k} \cdot \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{\nabla} \times \vec{A} = i\vec{k} \times \vec{A}.$$

4.2. Ebene monochromatische Wellen

$$t_{i_1 \dots i_N}(\vec{x}, t) = t_{i_1 \dots i_N}^0 e^{i\varphi(\vec{x}, t)}$$

$$\text{mit } \varphi(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

t_{\dots} Tensor, \vec{k} Vektor, φ Skalar

(a) $t_{i_1 \dots i_N}^0$ ist eine komplexe Amplitude der Welle

$$= A_{i_1 \dots i_N} e^{i\delta_{i_1 \dots i_N}}$$

↑ ↑
Betrag Phase

$$t_{\dots} = A_{\dots} \left[\cos(\varphi + \delta_{\dots}) + i \sin(\varphi + \delta_{\dots}) \right]$$

↑ ↑
reelle Lösungen der Theorie

$$(b) t_{\dots}(x, t+T) = t_{\dots}(x, t)$$

$$\text{falls } T = 2\pi/\omega$$

T heißt Schwingungsdauer der Welle

ω — " — (kreis) frequenz — " —

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi f$$

$$\nu = f \text{ heißt Frequenz}$$

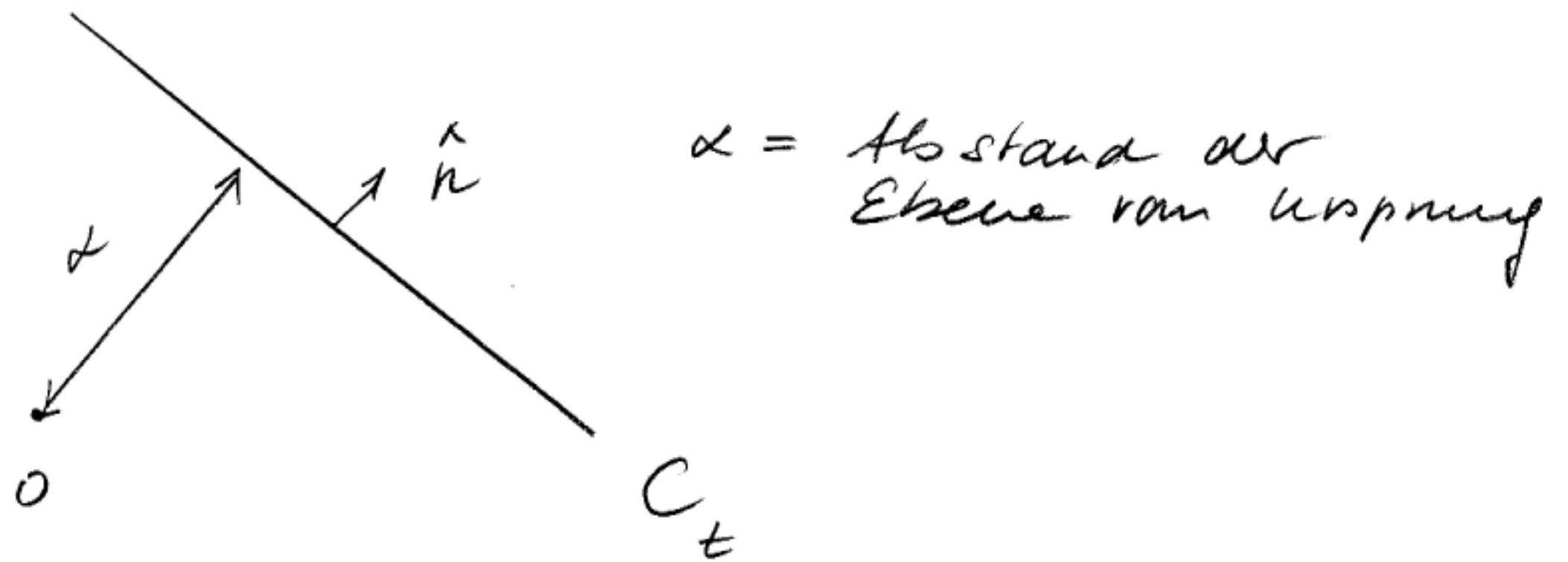
(c) $t_{\dots}(x, t) = \text{const}$ erfüllt auf der

$$\text{Phasenebene } C_t: \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t = c_0$$

Definieren norm. Normalenvektor $\hat{n} = \frac{\vec{k}}{k}$

$$\hat{n} \cdot \vec{x} = \frac{c_0 + \omega t}{k} = \alpha$$

(Heine Normalform)



$\alpha = \frac{c_0 + \omega t}{k}$ nimmt linear mit der Zeit t zu; $v = \frac{\omega}{k}$ heißt Phasen-
geschwindigkeit

(d) $t_{\dots}(\vec{x}, t) = A_{\dots} e^{i[\hat{n} \cdot \vec{x} k - \omega t + \delta_{\dots}]}$

$t_{\dots}(\vec{x} + \hat{n} \lambda, t) = t_{\dots}(\vec{x}, t)$ periodisch im Raum, falls $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ heißt Wellenlänge

$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{n}$ — Wellenvektor

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — Wellenzahl

(e) Die Feldgleichungen haben häufig mehrere Lösungen (Gleichungen überbestimmt)

$\omega = \omega_{\nu}(\vec{k})$ — Dispersionsrelation

$\nu = 1, \dots, \tau$ Wellentyp

(f) Gruppegeschwindigkeit

$\vec{v}_{\nu}(\vec{k}) := \frac{\partial \omega_{\nu}}{\partial \vec{k}}$

Beispiele

1. Schrödingergleichung für Skalarfeld ψ

$$\boxed{i \partial_t \psi(\vec{x}, t) = -\kappa \Delta \psi(\vec{x}, t)}$$

$$\psi = \psi_0 e^{i\varphi} \quad ; \quad \varphi = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$$

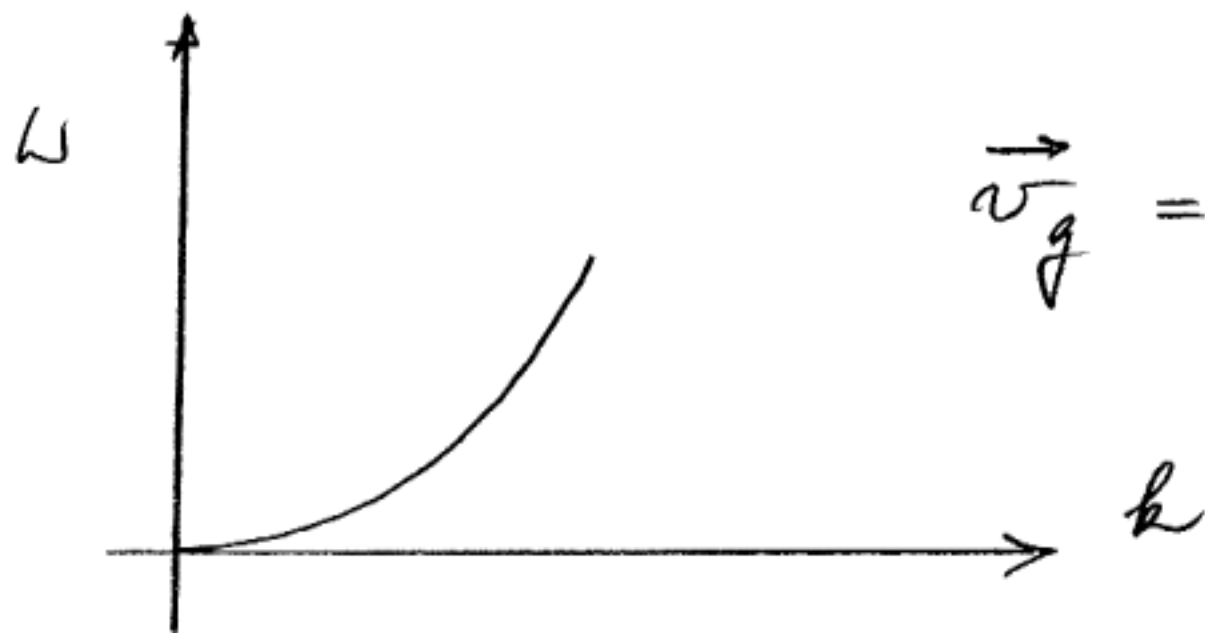
$$M=1, \quad N=1$$

$$i(-i\omega) \psi_0 = -\kappa (i\vec{k})^2 \psi_0$$

$$[\omega - \kappa k^2] \psi_0 = 0$$

$$\boxed{\omega = \kappa k^2}$$

Dispersion relation



$$\vec{v}_g = \frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}} = 2\kappa \vec{k}$$

2. Wellengleichung für Skalarfeld ψ

$$\boxed{\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta\right) \psi = 0} \quad ; \quad \psi = \psi_0 e^{i\varphi}$$

$$\left(\frac{1}{c^2} (-i\omega)^2 - (i\vec{k})^2\right) \psi_0 = 0$$

$$[\omega^2 - c^2 k^2] \psi_0 = 0$$

$$\boxed{\omega = ck}$$

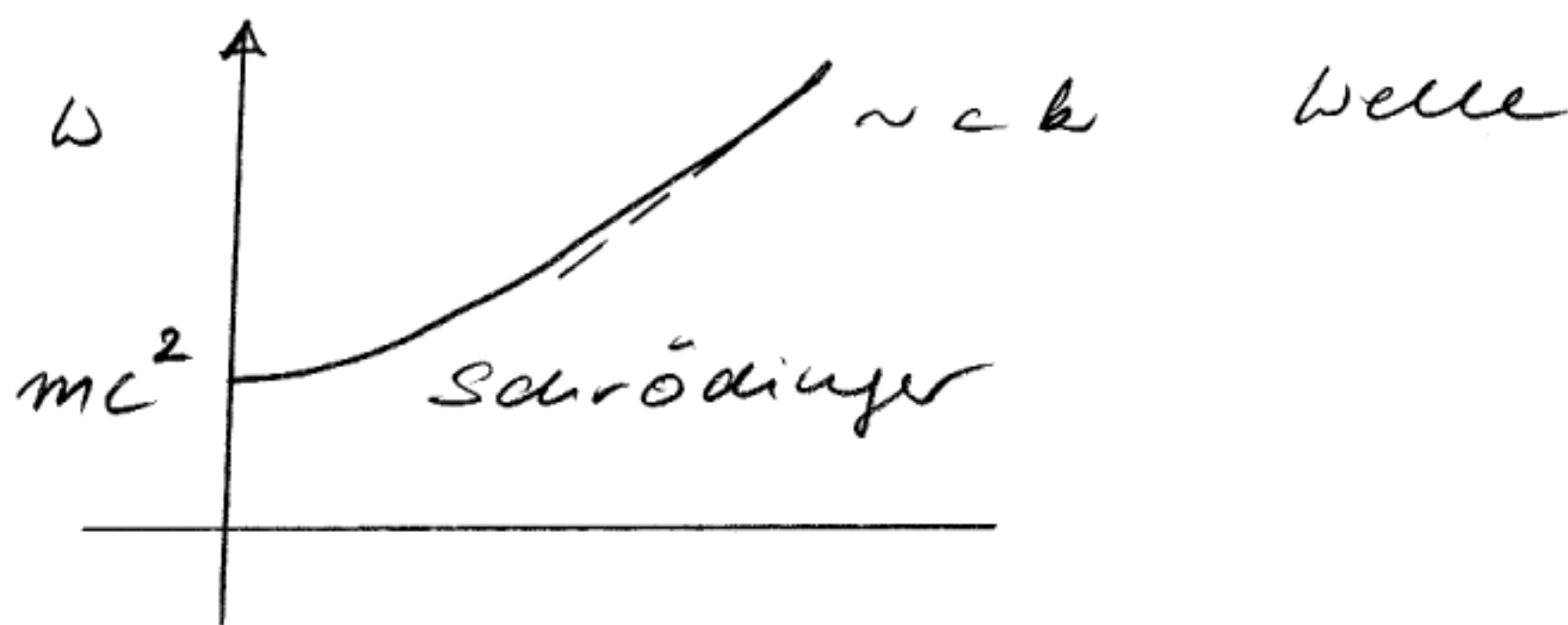
$c =$ Wellengeschwindigkeit
(Phasengeschw. = Gruppengeschw.)

3) Klein Gordon Gleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \Delta + m^2 c^2 \right) \psi = 0$$

$$\left(-\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 + m^2 c^2 \right) \psi_0 = 0$$

$$\omega = c \sqrt{k^2 + m^2 c^2}$$



4) Dirac Gleichung

$$i \frac{\mathbb{1}}{c} \partial_t \psi = \left(\frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc \right) \psi$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ Matrizen, $\mathbb{1}$ Einheitsmatrix

mit $\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0$, $\{\alpha_i, \beta\} = 0$

und $\alpha_i^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ (Einheitsmatrix)

$$\left(\frac{1}{c} i(-i\omega) - \frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot (i\vec{k}) - \beta mc \right) \psi_0 = 0$$

$$\leadsto \frac{\omega}{c} = \vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta mc$$

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 = (\alpha_i k_i + \beta mc) (\alpha_j k_j + \beta mc)$$

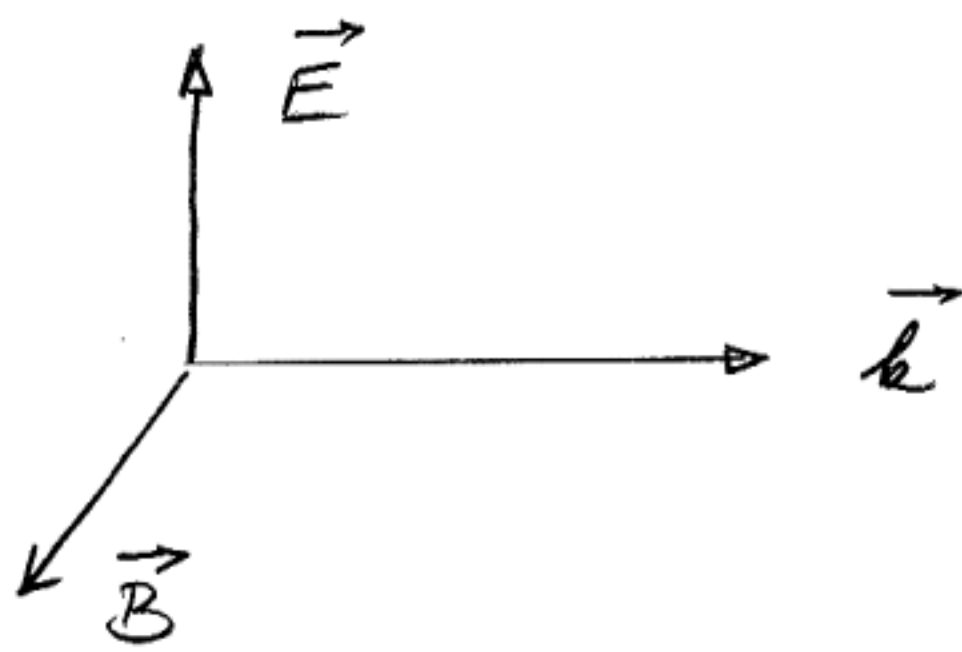
$$= \underbrace{\alpha_i \alpha_j k_i k_j}_{\vec{k}^2} + \underbrace{\{\alpha_i, \beta\}}_{=0} k_i + \underbrace{\beta^2}_{=1} m^2 c^2$$

$$= k^2 + m^2 c^2 \rightarrow \boxed{\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4}$$

$\{A, B\} = AB + BA$ Anti-Kommutator

4.4. Elektrom. Wellen in idealer Dielektrikum

- $\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{k} \cdot \vec{B}_0 = 0$
d.h. die \vec{B} -Felder sind transversal zum Wellenvektor \vec{k} : $\vec{k} \perp \vec{B}_0$
- $\operatorname{div} \epsilon \vec{E} = 0 \quad \leadsto \quad \vec{k} \cdot \vec{E}_0 = 0$
d.h. auch die \vec{E} -Felder sind transversal $\vec{k} \perp \vec{E}_0$
- $\frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = -\operatorname{rot} \vec{E} \quad \leadsto \quad \frac{-i\omega}{c} \vec{B}_0 = - (i\vec{k}) \times \vec{E}_0$
 $\leadsto \quad \vec{B}_0 = \left(\frac{c}{\omega}\right) \vec{k} \times \vec{E}_0$



$$|\vec{B}_0| = \frac{ck}{\omega} |\vec{E}_0|$$

$\{\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}\}$ nur ein rechtsorientiertes 3-Bein.

- $\frac{1}{c} \partial_t \vec{D} = \operatorname{rot} \vec{H}$
 $\leadsto -i\omega \frac{1}{c} \epsilon \vec{E}_0 = i\vec{k} \times \vec{B}_0 \frac{1}{\mu}$
 $\leadsto \vec{E}_0 = - \frac{c}{\mu \epsilon} \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{B}_0$
 $|\vec{E}_0| = \frac{ck}{\mu \epsilon \omega} |\vec{B}_0|$
 $= \frac{ck}{\mu \epsilon \omega} \cdot \frac{ck}{\omega} \vec{E}_0$
siehe oben

Folgerung: $\omega = v k$ lineare Dispersion

$$\text{mit } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

Sowohl \vec{E} wie \vec{B} genügen einer Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{pmatrix} = 0$$

Zusammenfassung; Ebene monodirektionale Wellen lösen die Maxwellgleichungen

(a) $(\vec{E}_0, \vec{B}_0, \vec{k})$ recht orient. Dreiein

(b) $\omega = v k$; $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$

(c) $B_0 = \sqrt{\epsilon\mu} E_0$ ($\epsilon = \mu = 1$ im Vakuum)

Damit hat c die Bedeutung der Geschw. der Maxwellwellen im Vakuum. Die Wellen sind eindeutig gegeben durch \vec{E}_0 , wobei $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$

lege man \vec{k} in die 3-Richtung



$\left\{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \frac{\vec{k}}{k} \right\}$ kartesisches Koordinatensystem

$$\vec{E}_0 = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2, \quad a_i = A_i e^{i\delta_i}$$

$$\vec{E} = A_1 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta_1) \vec{e}_1 + A_2 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta_2) \vec{e}_2$$

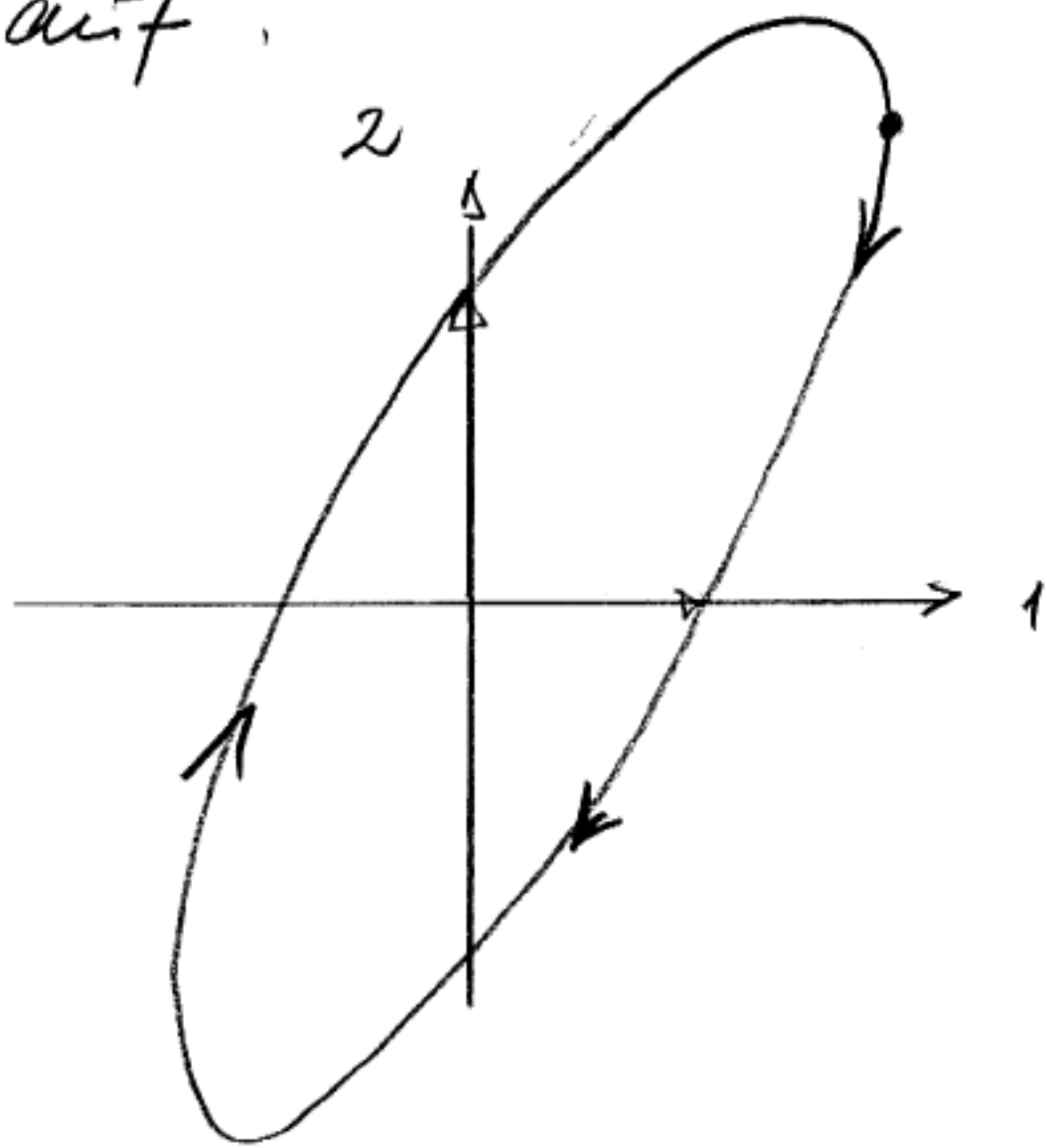
ist der Realteil von $\vec{E}_0 \exp[i\varphi(\vec{x}, t)]$.

\vec{E} läuft auf einer Ellipse mit der Kreisfrequenz ω . Sie heisst elliptisch polarisiert (allgemeiner Fall).

Im Spezialfall $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ gilt

$$\vec{E} = \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta) \underbrace{[A_1 \vec{e}_1 + A_2 \vec{e}_2]}_{=\vec{A}}$$

Man spricht von einer linear polarisierten Welle \vec{A} und \vec{k} spannen die Polarisations Ebene auf.



Zu jedem \vec{k} gibt es 2 linear unabhängige linear polarisierte Wellen; die allgemeine Welle ist eine Superposition von 2 linear polarisierten Wellen.

Die Ellipse wird zum Kreis, wenn $\delta_2 = \delta_1 + \frac{\pi}{2}$

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\pm}$$

$$\vec{E}_{\pm} = a_{\pm} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta_1)) \vec{e}_{\pm}$$

$$\vec{e}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_1 \pm i \vec{e}_2)$$

$$\vec{E}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{\pm} \left[\cos \varphi(x, t) \vec{e}_1 + \sin \varphi(x, t) \vec{e}_2 \right]$$

heißt rechts links zirkular polarisierte Welle



Kann man eine γ modulierte Welle
auch als Superposition von zwei zirkular polarisierten
Wellen schreiben.

4.5. Coulomb-Exzitonen und Polaronen

Wir untersuchen die Ausbreitung elem. Wellen in einem Medium, das durch das Lorentz-Drude Modell beschrieben wird.

(\rightarrow optische Moden in ionischen Kristallen)

Die Grundgleichungen lauten

$$(1) \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$(2) \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} + m \vec{E} = 0$$

$$(3) \operatorname{div} \vec{E} = -4\pi \operatorname{div} \vec{P}$$

$$(4) -\frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + m \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \partial_t \vec{P}$$

$$(5) \partial_t^2 \vec{P} + \omega_0^2 \vec{P} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}$$

wobei wir in der konstituierenden Gleichung den ungedämpften Fall ($\gamma=0$) betrachten.

Wir setzen wieder für alle Vektorfelder ebene monochromatische Wellen an,

$\vec{A} = \vec{A}_0 \exp[i\varphi(\vec{x}, t)]$ mit $\varphi(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$,
und zerlegen die Felder in ihre Anteile parallel und senkrecht zum Wellenvektor \vec{k} :

$$\vec{A} = \vec{A}'' + \vec{A}^\perp$$

$$\vec{A}'' = (\vec{k} \cdot \vec{A}) \vec{k} / k^2 \quad (\text{longitudinal})$$

$$\vec{A}^\perp = (\vec{k} \times \vec{A}) \times \vec{k} / k^2 \quad (\text{transversal})$$

Aus dem magnetischen Coulombgesetz folgt dann

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{B}'' = 0} \quad (1)'$$

Aus dem elektrischen Coulombgesetz folgt

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = -4\pi \vec{k} \cdot \vec{P} \quad \leadsto \quad \boxed{\vec{E}'' = -4\pi \vec{P}''} \quad (3)'$$

wobei der Term auf der rechten Seite die Ankopplung der elem. Welle an die Materie beschreibt

Das Faraday'sche Induktionsgesetz besagt

$$\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{B} + i \vec{k} \times \vec{E} = 0$$

mit (1)' folgt dann

$$-i \frac{\omega}{c} \vec{B}^\perp = -i \vec{k} \times \vec{E}^\perp$$

$$\boxed{\vec{B}^\perp = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}^\perp} \quad (2)'$$

Das Maxwell'sche Gesetz ergibt

$$-\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{E} + i (\vec{k} \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} (-i\omega) \vec{P}$$

mit (3)' folgt dann

$$\frac{\omega}{c} \vec{E}^\perp + \vec{k} \times \vec{B}^\perp = -4\pi \frac{\omega}{c} \vec{P}^\perp$$

$$\boxed{\vec{E}^\perp + 4\pi \vec{P}^\perp = -\frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{B}^\perp)} \quad (4)'$$

Die konstituierende Gleichung schliesslich ergibt

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) \vec{P}^{(,,\perp)} = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \vec{E}^{(,,\perp)}$$

also jeweils die identische Relation für die (orthogonalen) transversalen und longitudinalen Komponenten

$$\boxed{\vec{D}^{\parallel, \perp} = \chi(\omega) \vec{E}^{\parallel, \perp}} \quad (5)'$$

$$\chi(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi \chi(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Damit haben wir das Problem in zwei unabhängige Teilprobleme für longitudinale und transversale Wellen zerlegt!

Zunächst diskutieren wir den ungekoppelten Fall, d.h. Materie und elem. Wellen koppeln nicht über die Polarisation. Dann gilt für den longitudinalen Sektor:

$$E^{\parallel} = 0 = B^{\parallel} \quad (\text{keine long. elem. Wellen})$$

Für $P^{\parallel} \neq 0$ führt die Polarisation

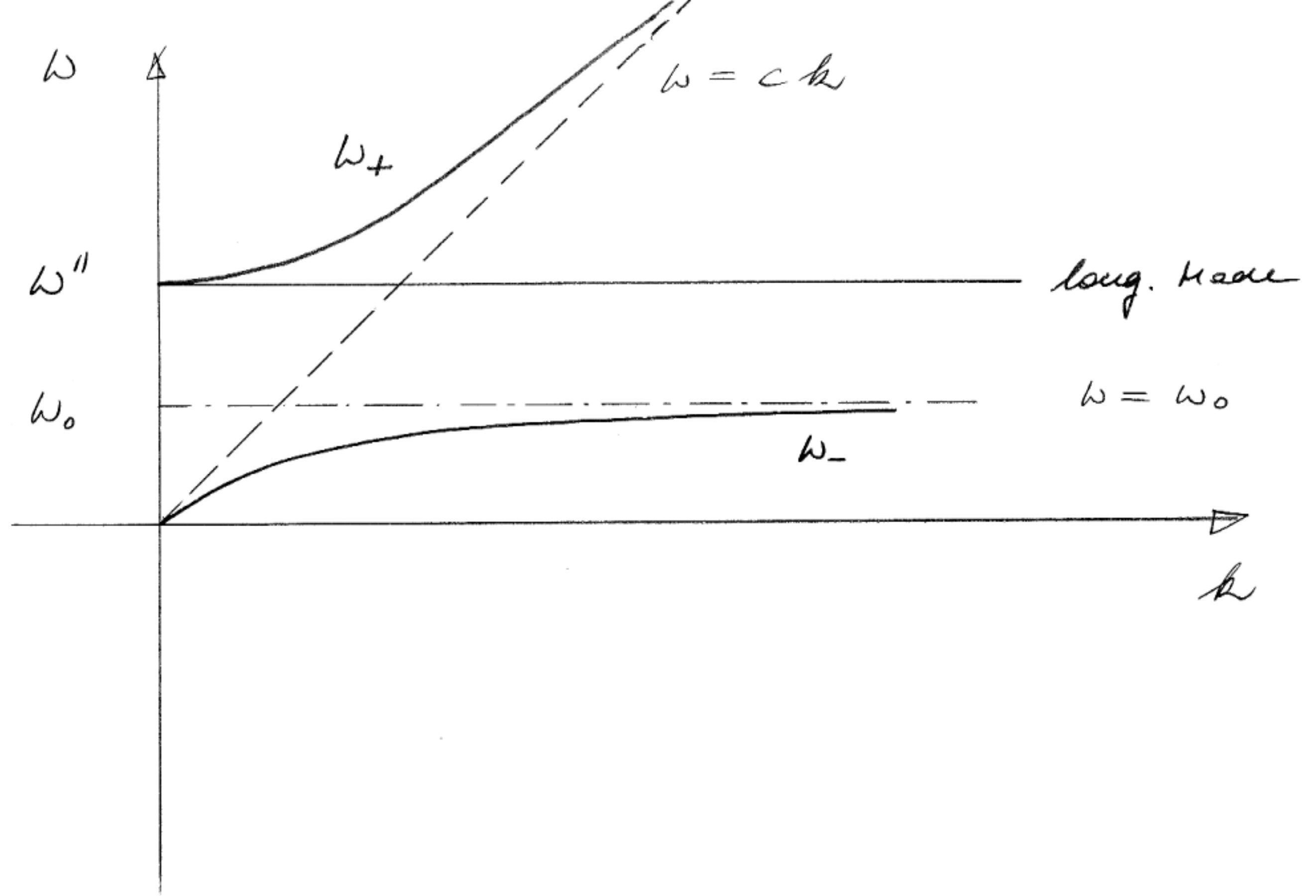
Eigenoszillationen mit der Frequenz ω_0 aus

Für den transversalen Sektor gilt:

Es gibt 2 (entartete) transversale Wellen

mit $\vec{E}^{\perp} \neq 0$ und der Dispersionsrelation

$$k = ck \quad (\text{siehe (2)' und (4)' mit } \vec{P}^{\perp} = 0)$$



ohne Kopplung:

2 (rechts und links pol.) transv. Wellen ; $\omega = ck$
 1 lang. Welle ; $\omega = \omega_0$

mit Kopplung:

- unterer Zweig ω_- ; Bei kleiner Wellenzahl verhält sich die elem. Welle so als ob sie sich in einem gewöhnlichen dielektr. Medium mit der DK ϵ_0 ausbreiten würde. Die Wellengeschw. ist $v = c / \sqrt{\epsilon_0}$. Mit wachsendem k nähert sich die Frequenz ω_0 an, d.h. $\chi(\omega) \rightarrow \infty$.
 Folglich führen kleine Amplituden der äußeren elektrischer Felder zu extrem großen Polarisatomen. Die Strahlung ändert sich von Lichtartig bei kleinen k zu phononenartig bei großen k .

Man nennt die Mode, die aus der Kopplung zwischen Licht und Phonon (Gitterdichtungen) entsteht auch POLARITONEN.

- oberer Zweig ω_+ : Bei kleinen k haben diese transversalen Moden eine zur longitudinalen Mode vergleichbare Frequenz. Bei großen k propagieren die Wellen wie im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit c .

Bemerkungen:

* $\omega_0 = 0 \quad \leadsto$ Coulomb EXZITONEN

$$\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 = \frac{\omega_{||}^2 - \omega^2}{-\omega^2}$$

$$\leadsto \underline{\omega_{\perp}^2} = \omega_{||}^2 + (ck)^2$$
$$= \underline{\omega_p^2 + (ck)^2}$$

2-fach entartet

und $\omega_{||}^2 = \omega_p^2$

- * Übungsaufgabe: Was passiert wenn man die Dämpfung berücksichtigt; $\gamma \neq 0$?

Fall elem. Wellen und Materie koppeln gilt

(a) longitudinale Wellen

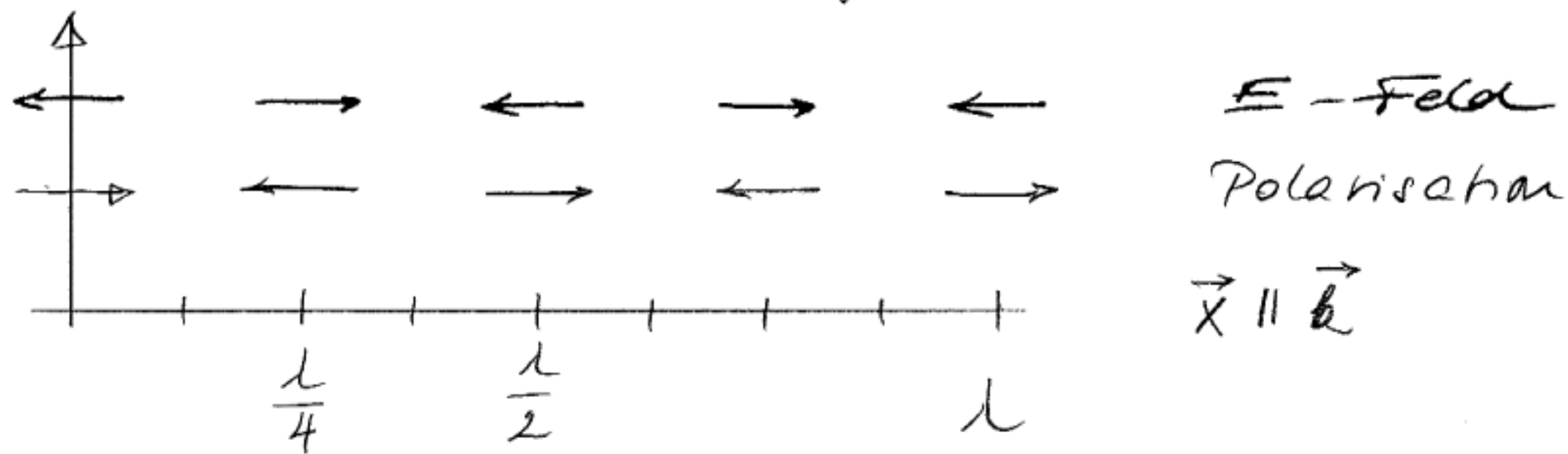
$$\vec{P}_0'' = P_0 \frac{\vec{k}}{k}, \quad \vec{B}_0'' = 0, \quad \vec{E}_0'' = -4\pi \vec{P}_0''$$

$$P_0 = A e^{i\delta}; \quad P = P_0 e^{i\varphi} \quad \rightarrow$$

$$P(\vec{x}, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t + \delta)$$

reelle Lösung

\vec{E}'' und \vec{P}'' schwingen in Gegenphase



Aus (5)' und (3)'

$$[-\omega^2 + \omega_0^2 + \omega_p^2] \vec{P}'' = 0$$

Für $\vec{P}'' \neq 0$ folgt $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_p^2$

d.h. die Dispersionsrelation lautet mit

$$\boxed{\omega'' = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}$$

Mit dieser longitudinalen Frequenz (Mode des gekoppelten Materie-ED-Systems) kann man $\epsilon(\omega)$ umschreiben

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\epsilon(\omega)}} &= 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 + \omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ &= \underline{\underline{\frac{(\omega'')^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}} \end{aligned}$$

Die Nullstelle von $\epsilon(\omega)$ ist also die Frequenz der longitudinalen Mode.

(b) Transversale Wellen (2)', (4)', (5)'

Wegen $\vec{B}_0^\perp = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E}_0^\perp$ bilden (wie im Vakuum) \vec{E}_0^\perp , \vec{B}_0^\perp und \vec{k} ein rechts orientiertes Dreibein.

$$(5)' : \vec{P}_0^\perp = \chi(\omega) \vec{E}_0^\perp$$

$$4\pi \chi(\omega) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

so dass für $\omega < \omega_0$ \vec{P}_0^\perp mit \vec{E}_0^\perp in Phase und für $\omega > \omega_0$ in Gegenphase schwingen.

Unter Verwendung des Durchflutungsgesetzes (4)' kann man die Dispersionsrelation der transversalen Wellen gewinnen:

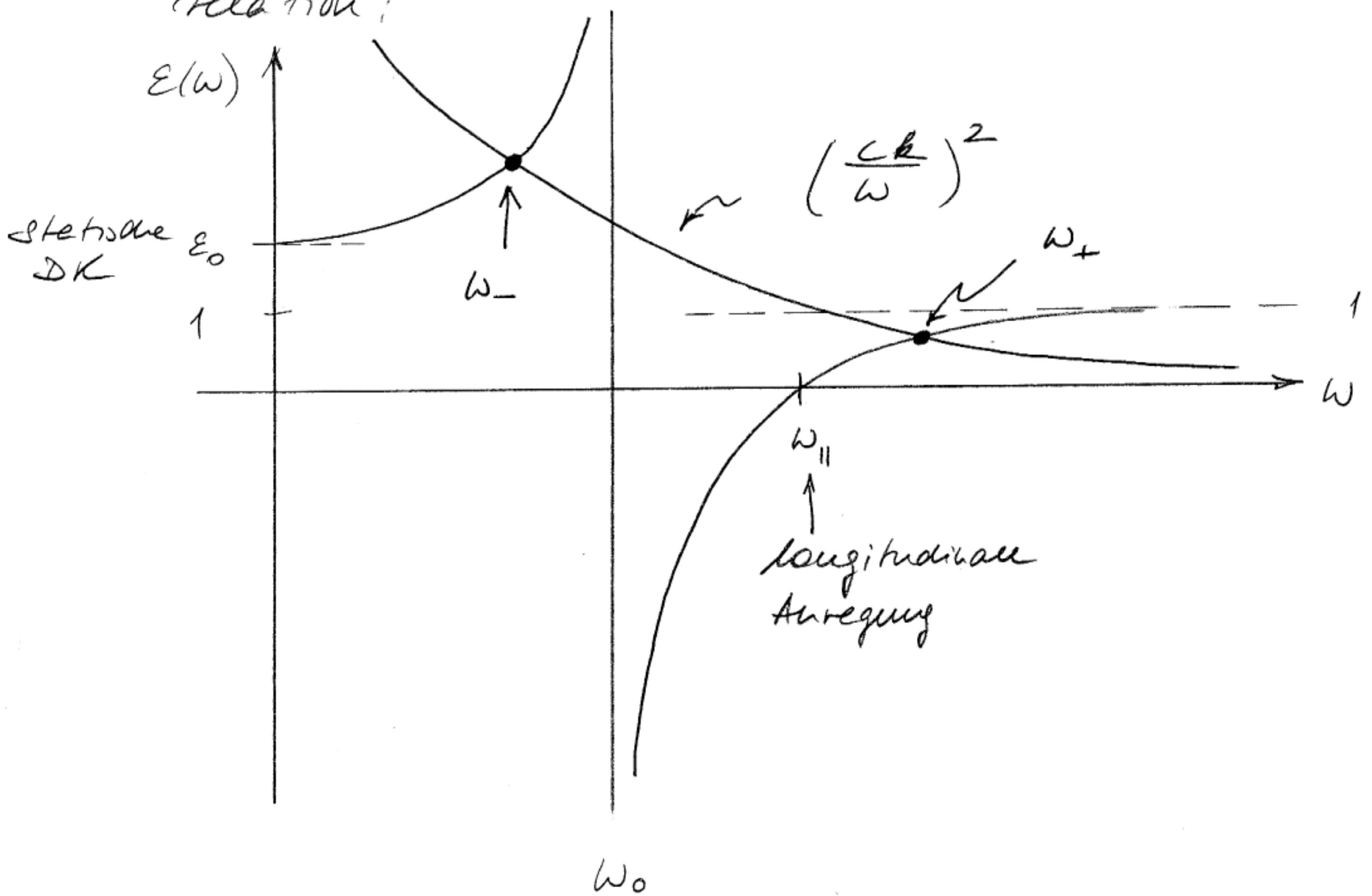
$$\begin{aligned} \vec{E}_0^\perp + 4\pi \chi(\omega) \vec{E}_0^\perp &= -\frac{c}{\omega} (\vec{k} \times \vec{B}_0^\perp) \\ &= -\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \underbrace{\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}_0^\perp)}_{= -k^2 \vec{E}_0^\perp} \end{aligned}$$

$$\left[\underbrace{1 + 4\pi \chi(\omega)}_{= \epsilon(\omega)} - \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 \right] \vec{E}_0^\perp = 0$$

↪ Dispersionsrelation

$$\boxed{\epsilon(\omega) = \left(\frac{kc}{\omega}\right)^2}$$

Graphische Lösung der transversalen Dispersionsrelation:



Eigenfrequenz
des Mediums

$$E(k) = \frac{\omega_{||}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_0 = \left(\frac{\omega_{||}}{\omega_0}\right)^2 & ; \omega = 0 \\ 1 & ; \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\epsilon_0 = \left(\frac{\sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}}{\omega_0}\right)^2 > 1$$

2 Lösungszweige: $\omega_{\pm}(\vec{k})$

(1) $\omega_+ > \omega_{||}$, monoton wachsend in k
 $\omega_+(k=0) = \omega_{||}$
 $\omega_+(k \rightarrow \infty) = ck$ (Lichtwelle)

(2) $\omega_- > 0$, $\omega_- < \omega_0$
 $\omega_-(k \rightarrow 0)$: $\frac{ck}{\omega} = \epsilon_0 \Rightarrow \omega = \frac{c}{\epsilon_0} k$; $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}$
 $\omega_-(k \rightarrow \infty) \rightarrow \omega_0$

Bemerkungen

1) Die dielektrische Funktion $\epsilon(\omega)$ in ionischen Kristallen hat im allgemeinen die Form

$$\epsilon(\omega) = \epsilon^\infty \left[\frac{\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_L^2}{\omega^2 + i\gamma\omega - \omega_T^2} \right]$$

so dass $\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty} = \left(\frac{\omega_L}{\omega_T} \right)^2$ gilt

(Lyddane - Teller - Sachs Relation)

Beispiel: CdS

$$\epsilon_0 = 8.9, \quad \epsilon_\infty = 5.4$$

$$\frac{\omega_T}{2\pi c} = 232 \text{ cm}^{-1}$$

$$\frac{\gamma}{2\pi c} = 6.9 \text{ cm}^{-1}$$

Dann

$$\omega_+(k) = \begin{cases} \omega_L & k \rightarrow 0 \\ \frac{c}{\sqrt{\epsilon_\infty}} k & k \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\omega_-(k) = \begin{cases} \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}} k & k \rightarrow 0 \\ \omega_T & k \rightarrow \infty \end{cases}$$

4.6. Cauchy - Problem und allgemeine Wellenfelder

Cauchy - Problem: Welche Anfangsbedingungen legen die Lösung der Feldgleichungen fest?

Als Beispiel betrachten wir hierzu zunächst die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \Delta + \kappa^2 \right) \varphi(\vec{x}, t) = 0$$

(entspricht für $\kappa = 0$ der Wellengleichung)

Wir führen eine Fouriertransformation durch $\hat{\varphi}(\vec{k}, t) = \int d^3x e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \varphi(\vec{x}, t)$ und erhalten

$$\left[\frac{1}{v^2} \partial_t^2 + k^2 + \kappa^2 \right] \hat{\varphi}(\vec{k}, t) = 0$$

oder

$$\partial_t^2 \hat{\varphi}(\vec{k}, t) = -\omega^2(k) \hat{\varphi}(\vec{k}, t)$$

mit $\hat{\omega}(k) = v \sqrt{k^2 + \kappa^2}$ als

Dispersionsrelation

Damit ist die KG Gleichung auf die Gleichung eines harmonischen Oszillators reduziert. Wir wissen damit, daß die Lösungen der KG Gleichung eindeutig durch die Angabe der Anfangswerte und Anfangsgeschwindigkeiten der Felder zu einem Zeitpunkt t_0 bestimmt sind

$$\hat{F}(\vec{k}) = \hat{\varphi}(\vec{k}, t_0) \quad ; \quad F(\vec{x}) = \hat{\varphi}(\vec{x}, t_0)$$

$$\hat{G}(\vec{k}) = \partial_t \hat{\varphi}(\vec{k}, t_0) \quad ; \quad G(\vec{x}) = \partial_t \hat{\varphi}(\vec{x}, t_0)$$

Die Lösung lautet

$$\hat{\psi}(\vec{k}, t) = a_+(\vec{k}) e^{-i\omega(\vec{k})(t-t_0)} + a_-(\vec{k}) e^{+i\omega(\vec{k})(t-t_0)}$$

Anfangsbedingungen

$$\hat{F}(\vec{k}) = a_+(\vec{k}) + a_-(\vec{k})$$

$$\hat{G}(\vec{k}) = -i\omega(\vec{k}) [a_+(\vec{k}) - a_-(\vec{k})]$$

$$\rightarrow a_{\pm}(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left[\hat{F}(\vec{k}) \pm \frac{i}{\omega(\vec{k})} \hat{G}(\vec{k}) \right]$$

Rücktransformationsformeln:

$$\psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[a_+(\vec{k}) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega(\vec{k})(t-t_0)]} + a_-(\vec{k}) e^{i[\vec{k}\cdot\vec{x} + \omega(\vec{k})(t-t_0)]} \right]$$

Die allgemeine Lösung der KG-Gleichung ist also eine Superposition ebener Monochromatener Wellen.

Bemerkung: Derartige Zerlegungen von Feldgleichungen spielen eine wichtige Rolle bei der „Quantisierung“

Cauchy - Problem der Maxwell Theorie (im idealen Dielektrikum)

Wir führen eine Fourierzerlegung der elem. Felder durch

$$\begin{pmatrix} \vec{E}(\vec{x}, t) \\ \vec{B}(\vec{x}, t) \end{pmatrix} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{+i\vec{k}\cdot\vec{x}} \begin{pmatrix} \hat{E}(\vec{k}, t) \\ \hat{B}(\vec{k}, t) \end{pmatrix}$$

Aus den Maxwellgleichungen erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} (1) \quad \text{div } \vec{E} &= 0 & ; & \quad i\vec{k} \cdot \hat{E} = 0 \\ (2) \quad \text{rot } \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} &= 0 & ; & \quad i\vec{k} \times \hat{E} + \frac{1}{c} \partial_t \hat{B} = 0 \\ (3) \quad \text{div } \vec{B} &= 0 & ; & \quad i\vec{k} \cdot \hat{B} = 0 \\ (4) \quad \text{rot } \vec{B} - \frac{\epsilon\mu}{c} \partial_t \vec{E} &= 0 & ; & \quad i\vec{k} \times \hat{B} - \frac{\epsilon\mu}{c} \partial_t \hat{E} = 0 \end{aligned}$$

(1), (3) \leadsto Transversalität der elem. Felder

$$\boxed{\hat{B}^{\parallel} = 0 = \hat{E}^{\parallel}}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \hat{B}^{\perp} &= -i\vec{k} \times \frac{1}{c} \partial_t \hat{E}^{\perp} \\ &= -i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \hat{B}^{\perp}) \frac{1}{\epsilon\mu} \\ (4) & \\ &= -k^2 \hat{B}^{\perp} \frac{1}{\epsilon\mu} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\epsilon\mu}{c^2} \partial_t^2 \hat{B}^{\perp} + k^2 \hat{B}^{\perp} = 0}$$

$$\omega = vk \quad \text{mit} \quad v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

als Wellengleichung

Analog sei man

$$\frac{\epsilon\mu}{c^2} \partial_t \vec{E}^\perp + k^2 \vec{E}^\perp = 0$$

Zur Frage der Lösung des Cauchy Problems für die Gleichungen (2) und (4) zu betrachten. Es handelt sich um zwei gekoppelte lineare Differentialgleichung 2ter Ordnung in ∂_t . Folglich sind die elem. Felder eindeutig durch die Angabe von $\vec{E}^\perp(\vec{x}, t_0)$ und $\vec{B}^\perp(\vec{x}, t_0)$ bestimmt. Die allgemeine Lösung ist dann wie bei der KG Gleichung die Superposition ebener monochromatischer Wellen mit (linearer / zirkular) Polarisation.

4.7. Formel von D'Alembert

Betrachte eine Feldtheorie, die durch die Wellengleichung gegeben ist

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \Delta \right) \psi(\vec{x}, t) = 0$$

Für ebene Wellen $\psi(\vec{x}, t) = \psi_0 e^{i\varphi(\vec{x}, t)}$
mit $\varphi(\vec{x}, t) = \vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t$ ergibt sich aus der Wellengleichung die Dispersionsrelation $\omega(k) = c|\vec{k}|$. Wähle die Ausbreitungsrichtung der Welle in Richtung der z-Achse:
 $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \vec{e}_z$. Dann reduziert sich die Wellengleichung auf ein eindimensionales Problem

$$\left(\frac{1}{v^2} \partial_t^2 - \partial_z^2 \right) \phi(z, t) = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung läßt sich auf vielerlei Weise finden. Wir wählen hier den Weg über die Fouriertransformation (siehe Cauchy-Problem für die KB-Gleichung)

$$\phi(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} \left[a_+(k) e^{ikz - i\omega(k)t} + a_-(k) e^{ikz + i\omega(k)t} \right]$$

Verwende die Dispersionsrelation

$$\omega(k) = v|\vec{k}| = \begin{cases} vk & k > 0 \\ -vk & k < 0 \end{cases}$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (\Theta - \text{Funktion})$$

$$\begin{aligned} \phi(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ikz} \left[\Theta(k) \left(a_+(k) e^{-i\sigma kt} + a_-(k) e^{+i\sigma kt} \right) \right. \\ &\quad \left. + \Theta(-k) \left(a_+(k) e^{+i\sigma kt} + a_-(k) e^{-i\sigma kt} \right) \right] \\ &= \int \frac{dk}{2\pi} \left\{ e^{ik(z-\sigma t)} \underbrace{\left[\Theta(k) a_+(k) + \Theta(-k) a_-(k) \right]}_{=\hat{\phi}_+(k)} \right. \\ &\quad \left. + e^{ik(z+\sigma t)} \underbrace{\left[\Theta(k) a_-(k) + \Theta(-k) a_+(k) \right]}_{=\hat{\phi}_-(k)} \right\} \end{aligned}$$

$$k > 0 : \quad \begin{aligned} \hat{\phi}_+(k) &= a_+(k) \\ \hat{\phi}_-(k) &= a_-(k) \end{aligned}$$

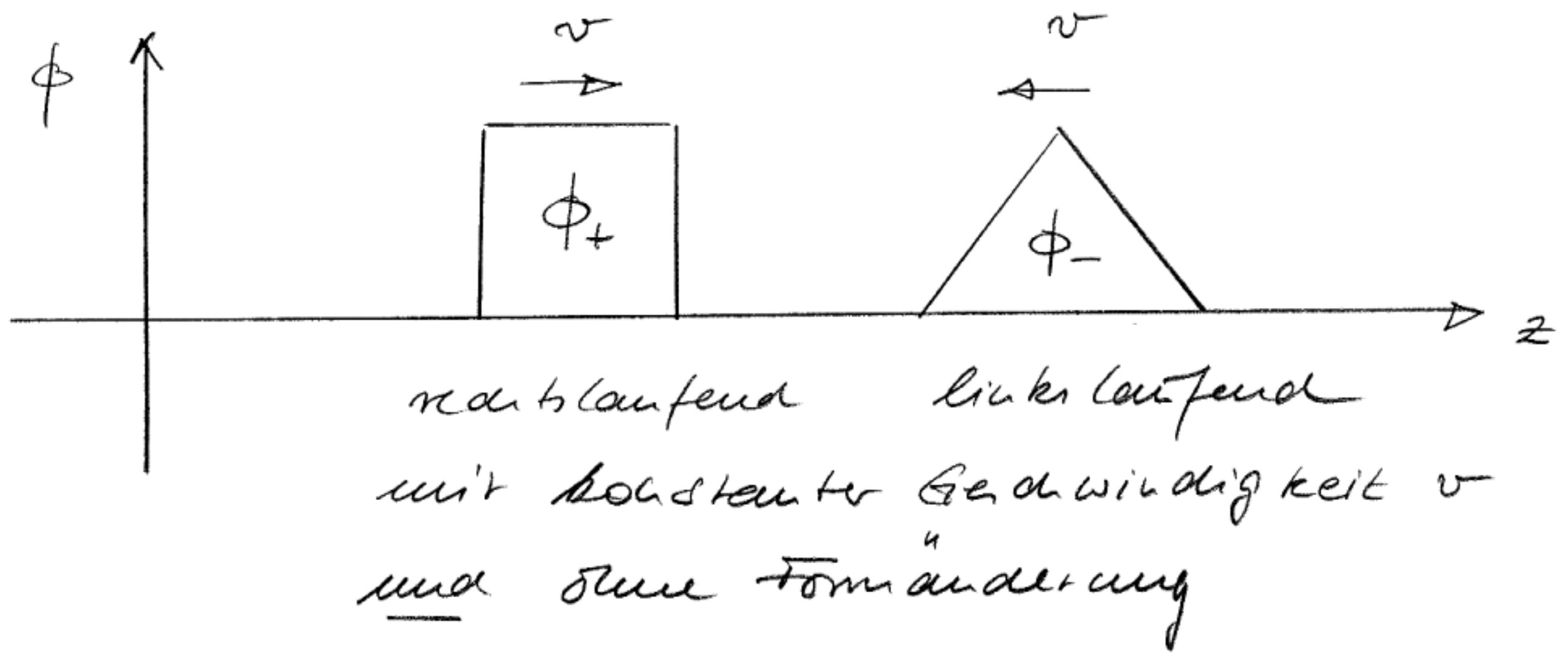
$$k < 0 : \quad \begin{aligned} \hat{\phi}_+(k) &= a_-(k) \\ \hat{\phi}_-(k) &= a_+(k) \end{aligned}$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} \left[e^{ikz_+ t} \hat{\phi}_+(k) + e^{ikz_- t} \hat{\phi}_-(k) \right]$$

$$= \phi_+(z - \sigma t) + \phi_-(z + \sigma t)$$

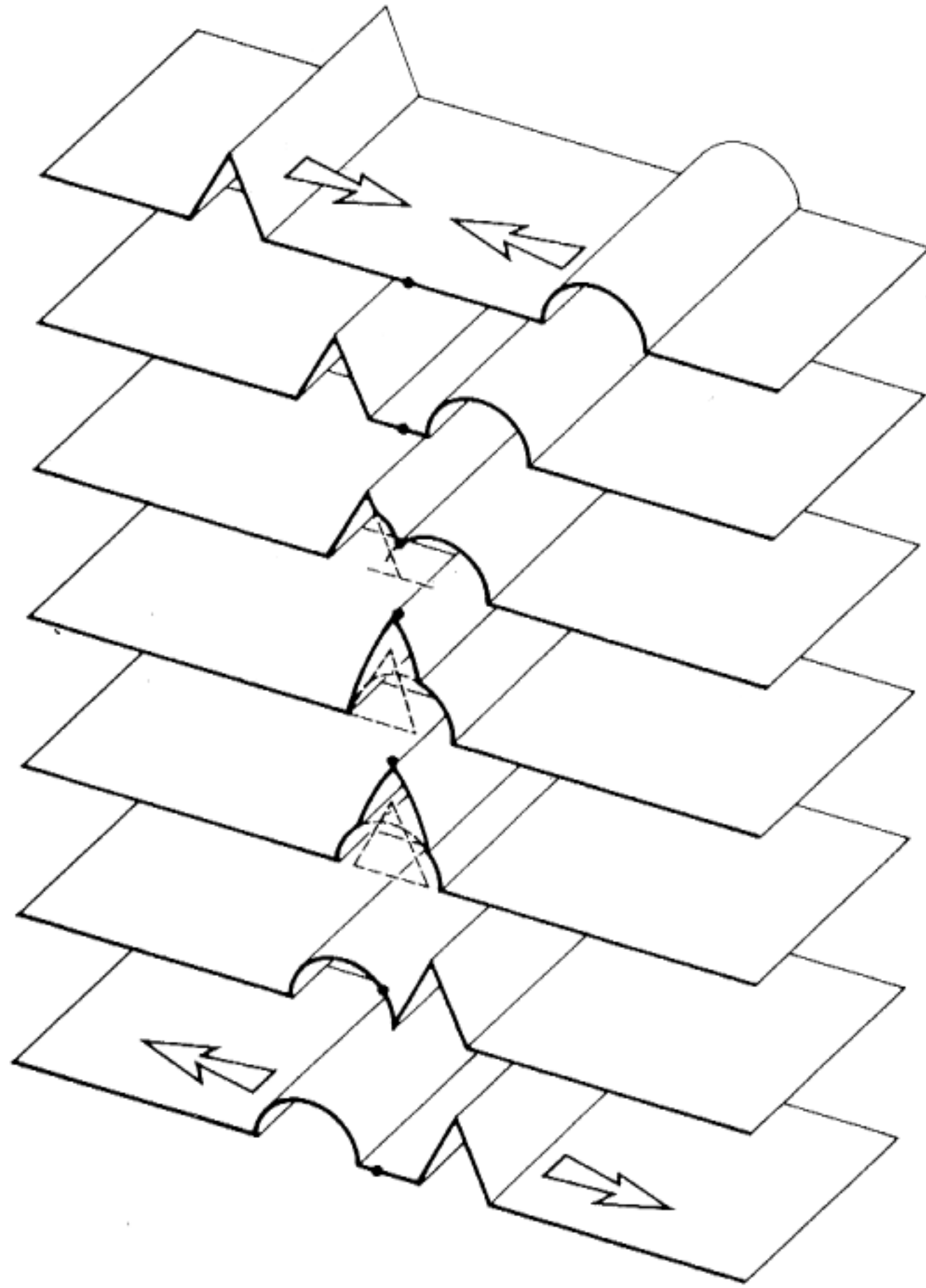
Die allgemeine Lösung der 1D Wellengl.
 ist durch zwei beliebige Funktionen $\phi_+(z)$
 und $\phi_-(z)$ durch die D'Alembert Formel
 gegeben

$$\boxed{\phi(z, t) = \phi_+(z - \sigma t) + \phi_-(z + \sigma t)}$$



Wegen der Linearität der Wellengleichung lassen sich zwei (oder mehrere) wellenzüge superponieren. Sie bleiben auch nachdem sie sich durchdrungen haben unverändert.

Bem: Auch nichtlineare Differentialgleichungen können spezielle Lösungen haben, die mit konstanter Geschwindigkeit durch den Raum wandern \rightarrow solitäre Lösungen. Sie besitzen oft eine spezielle Form $f(z_{\pm})$. Obwohl für nichtlineare Differentialgl. das Superpositionsprinzip nicht gilt, kann es in Sonderfällen geschehen, daß sich solitäre Lösungen überlagern lassen ohne sich zu stören \rightarrow Solitonen.



The superposition of two disturbances.

4.8. Wellenpakete

Der spezifische Zusammenhang zwischen ω und k bestimmt $v = \frac{\omega}{k}$, die Phasengeschw. einer Welle. In einem nicht dispersiven Medium ist $\omega(k) \sim k$ so dass alle Wellen mit der gleichen Phasengeschwindigkeit fortbewegen. Im Gegensatz hierzu, propagiert in einem dispersiven Medium jede Welle mit einer Geschwindigkeit, die von der Frequenz abhängt.

Wir beschränken nun in der Diskussion auf den 1D Fall^{*)}, und betrachten eine Überlagerung von harmonischen Wellen mit der Dispersion $\omega(k)$

$$\begin{aligned}\phi(x,t) &= \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \hat{\phi}(k,t) \\ \hat{\phi}(k,t) &= a(k) e^{-i\omega(k)t}\end{aligned}$$

$\rho(x,t) := |\phi(x,t)|^2$ heisst die Dichte des Feldes, und

$\rho(k) := \frac{1}{2\pi} |a(k)|^2$ die Dichte der Wellenzahl k .

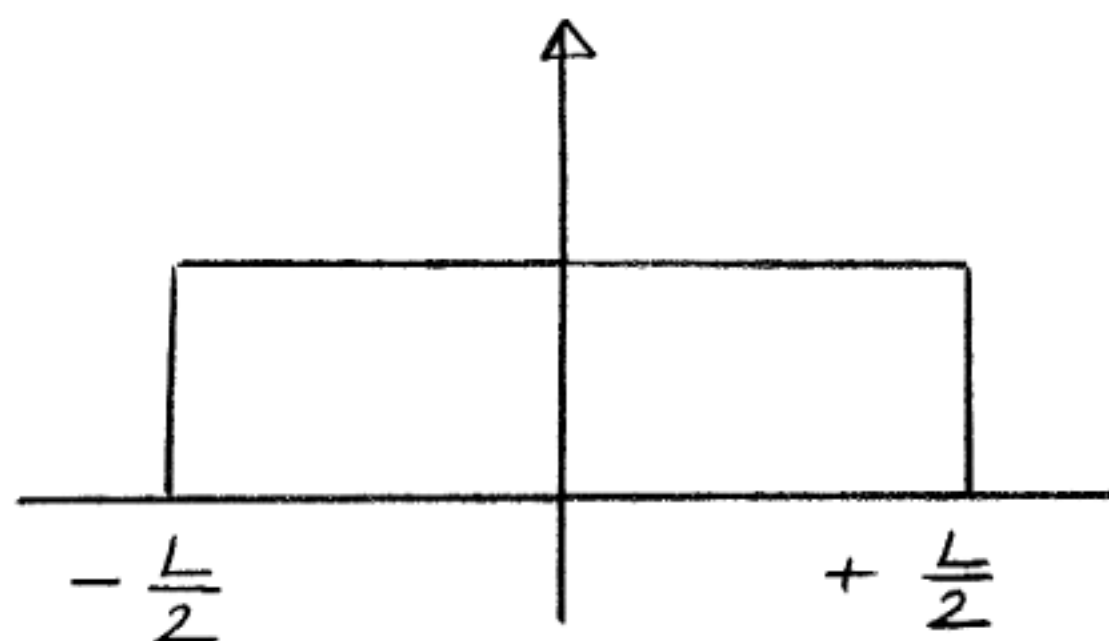
Häufig ist $\rho(k)$ stark um einen bestimmten Wert k_p zentriert ("gepeakt").

^{*)} Die Verallgemeinerung auf 3D ist trivial

Beispiele:

(a) Rechteckpuls

$$\phi(x) = \begin{cases} A; & |x| < \frac{L}{2} \\ 0; & |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



(Anfangsform des Pulses / Wellenpakets)

$$a(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) e^{ikx} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi(x) \cos(kx)$$

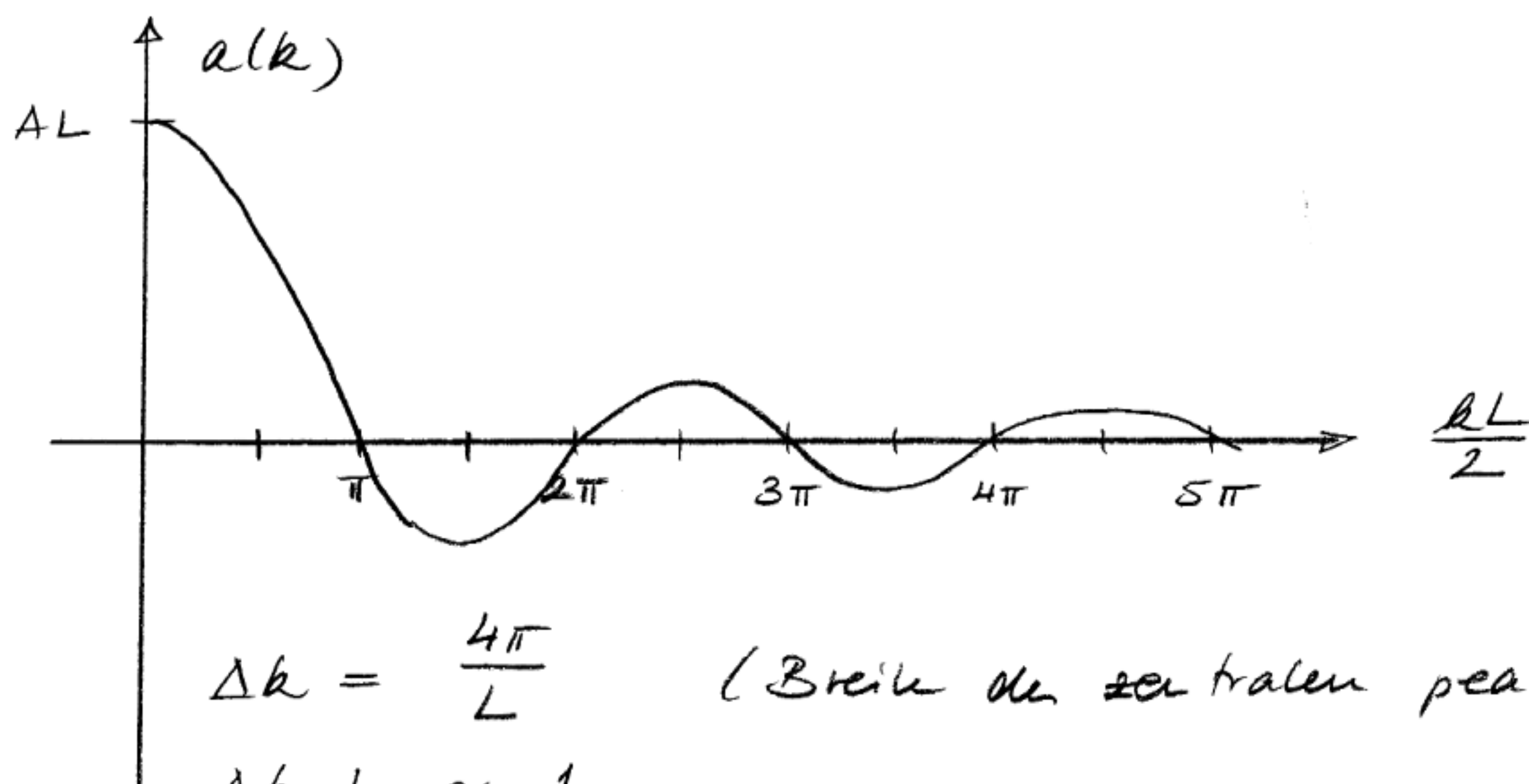
da $\phi(x)$ eine gerade Funktion

$$= A \int_{-L/2}^{+L/2} dx \cos(kx) = \frac{A}{k} \sin(kx) \Big|_{-L/2}^{+L/2}$$

$$= \frac{A}{k} \left(\sin\left(\frac{kL}{2}\right) - \sin\left(-\frac{kL}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{2A}{k} \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = A \cdot L \frac{\sin\left(\frac{kL}{2}\right)}{\frac{kL}{2}}$$

$$\equiv A L \operatorname{sinc} \frac{kL}{2} \quad ; \quad \operatorname{sinc} x = \frac{\sin x}{x}$$



$$\Delta k = \frac{4\pi}{L} \quad (\text{Breite des zentralen peaks})$$

$$\Delta k \cdot L \sim 1$$

$$\text{Breite Puls} \times \text{Breite Spektrum} \sim 1$$

(b) "Gauß'sche" Frequenzkämmе → Folie

Beginne mit einer Sinuswelle mit Wellenzahl k_p , die wir als Träger (oder Peak) Frequenz bezeichnen → (a)

Addiere symmetrisch um k_p zwei weitere (räumliche) Frequenzen. Die zentrale (mittlere) Frequenz bleibt unverändert. Es entstehen Schwebungen (Modulationen der Trägerwelle). → (b)

Fügt man nun weitere Paare von Sinuswellen dazu führt dies zu einem größeren Abstand zwischen den Pulsen ohne die Form merklich zu verändern → (c), (d)

Im Kontinuumlimit erhält man eine Gaußverteilung → (e)

$$a(k) = \exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_p)^2\sigma^2\right]$$

$$\phi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \exp\left[-\frac{1}{2}(k-k_p)^2\sigma^2\right]$$

$$= \int \frac{d\tilde{k}}{2\pi} \exp\left[i(\tilde{k}+k_p)x - \frac{1}{2}\tilde{k}^2\sigma^2\right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= k - k_p \\ &= e^{ik_p x} \int \frac{d\tilde{k}}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(\tilde{k}\sigma - i\frac{x}{\sigma})^2 - \frac{x^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

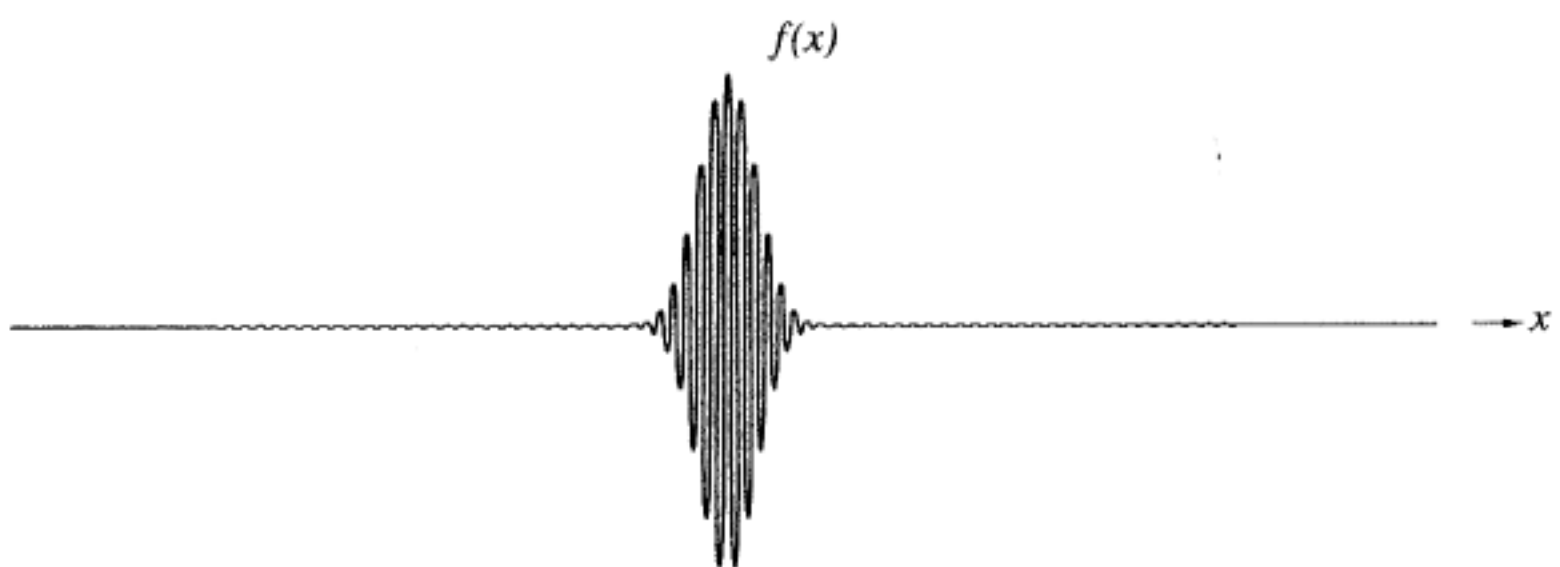
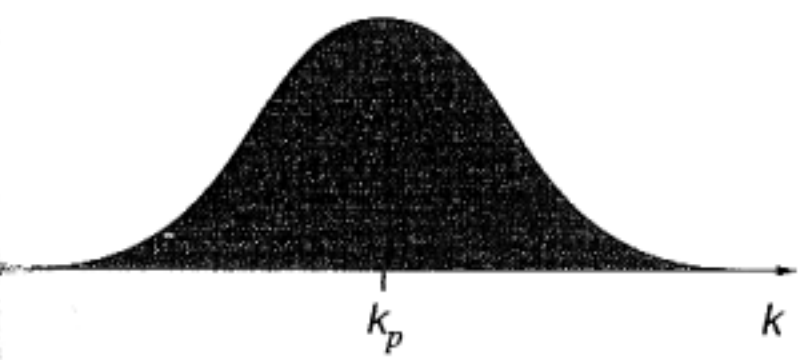
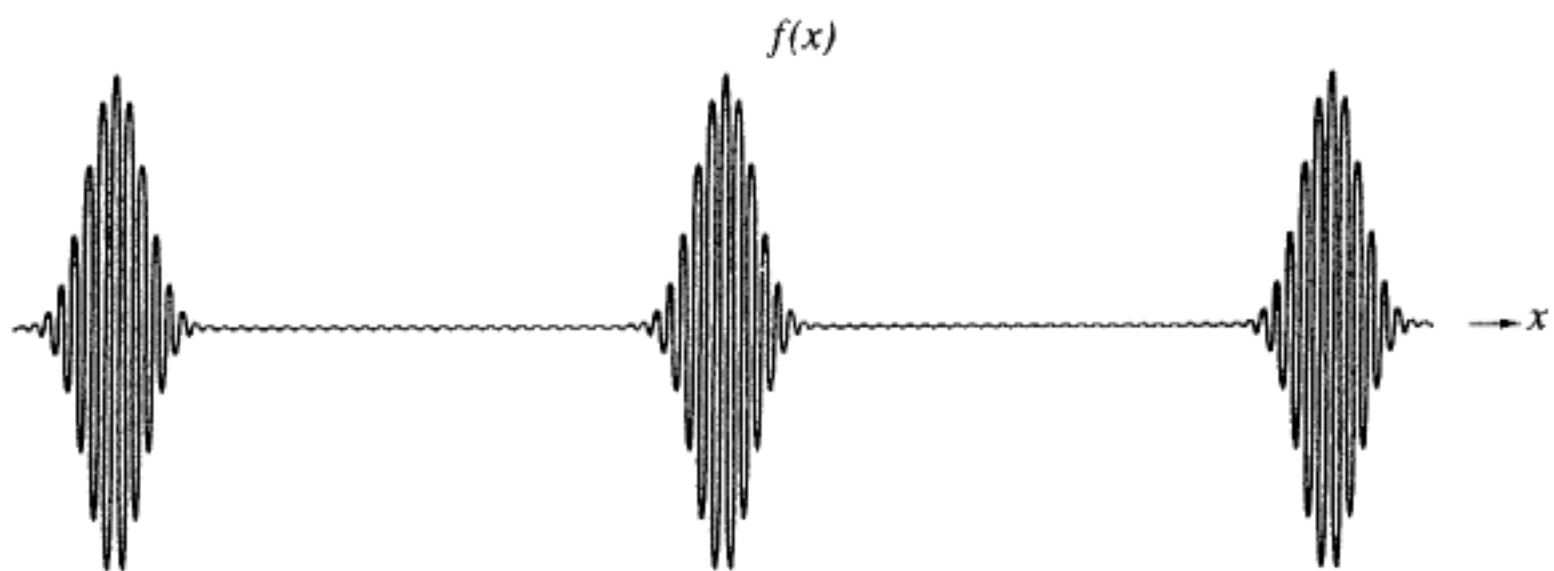
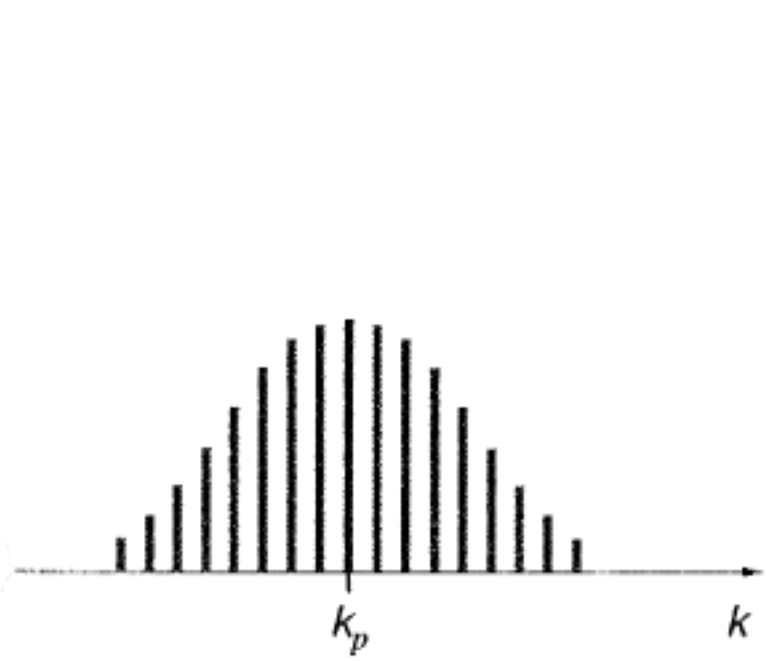
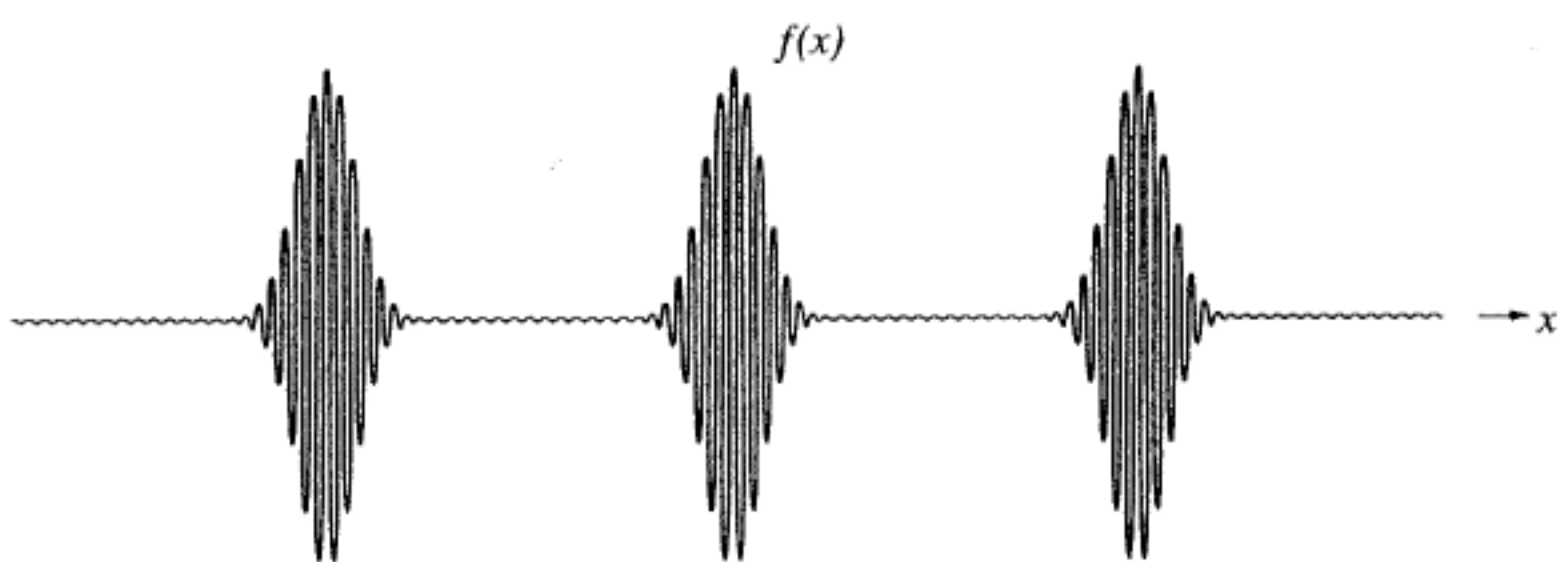
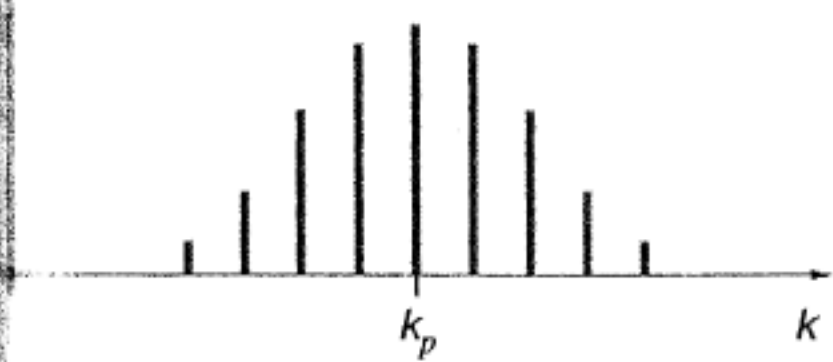
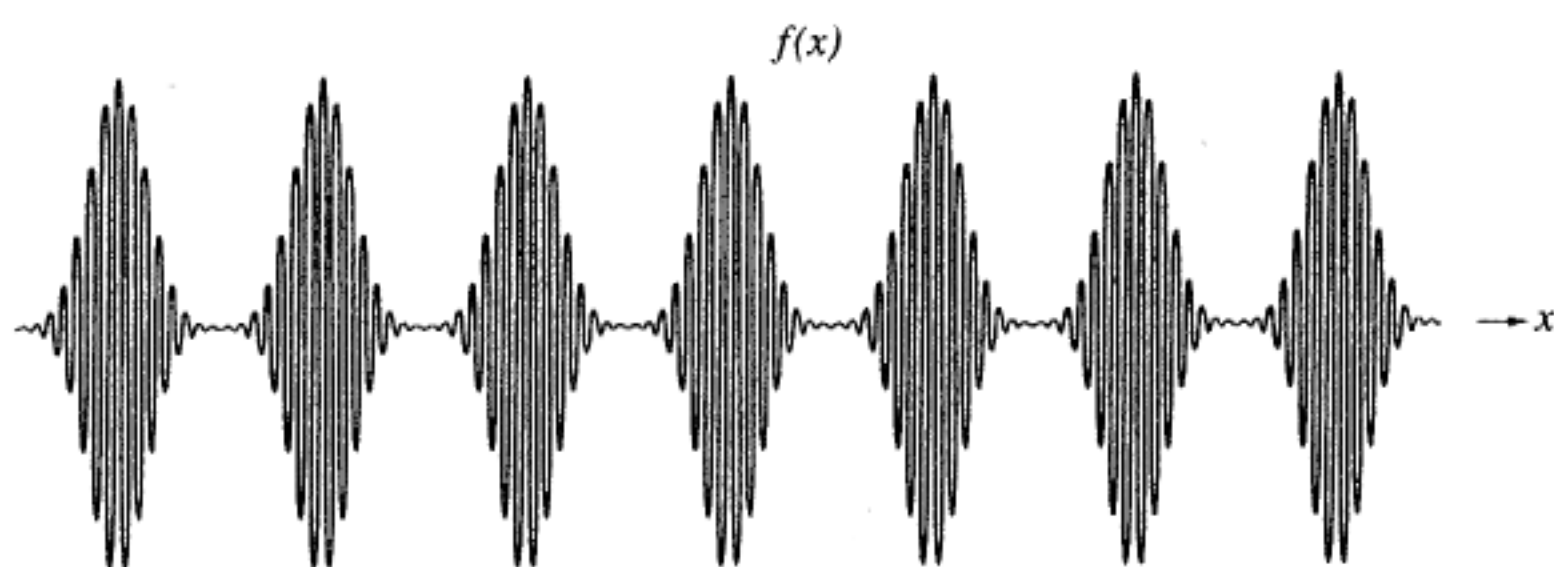
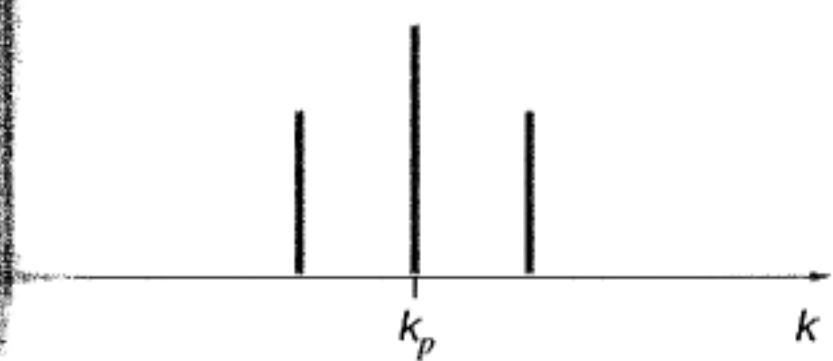
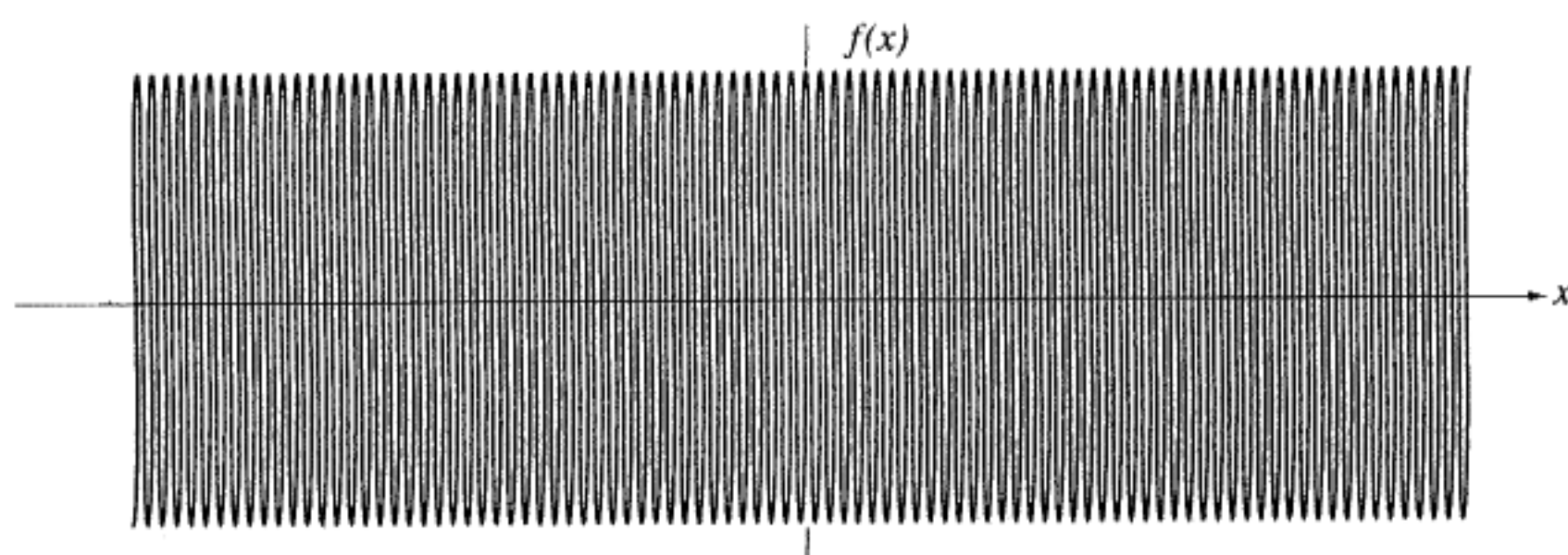
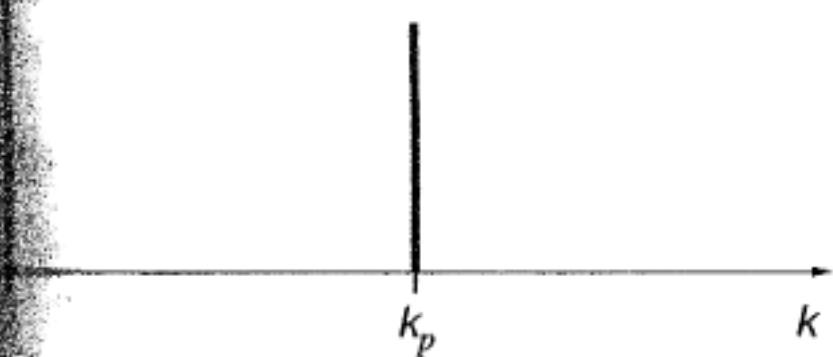
$$= e^{ik_p x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$$= e^{ik_p x} \phi_\sigma(x)$$

TRÄGERWELLE

Einhüllende = Gaußfunktion

Gaußintegral $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$



Zur Charakterisierung des Wellenpaketes führen wir die folgenden Größen ein ^{*})

Mittlere Position, Wellenzentrum

$$R(t) := \langle x(t) \rangle = \int dx \rho(x, t) x$$

Mittlere quadratische Radius

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &:= \langle (x(t) - R(t))^2 \rangle \\ &= \int dx \rho(x, t) (x - R(t))^2 \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun zunächst die mittlere Position

$$R(t) = \int dx \psi^*(x, t) (x \psi(x, t))$$

$$\stackrel{\text{Parseval}}{=} \int \frac{dk}{2\pi} \hat{\psi}^*(k, t) (i \partial_k \hat{\psi}(k, t))$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} a^*(k) e^{+i\omega(k)t} (i \partial_k a(k) e^{-i\omega(k)t})$$

$$= \int \frac{dk}{2\pi} a^*(k) \left(t \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} a(k) + i \frac{\partial a(k)}{\partial k} \right)$$

$$= t \underbrace{\int dk \rho(k) \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}}_{\langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \rangle} + \underbrace{\int \frac{dk}{2\pi} a(k) i \partial_k a(k)}_{= R_0 \text{ zeitunabh. Konstante}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \langle R(t) \rangle = \langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \rangle$$

^{*}) Wir wählen die Normierung so daß $\int \rho(x, t) dx = 1$
Dann ist aufgrund der Parsevalgleichung auch
 $\int dk \rho(k) = 1$.

Wir folgern also, daß die Geschwindigkeit
des Wellenmittelpunktes sich als der
Mittelwert der Gruppen Geschwindigkeit ergibt

$$v_g(k) = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$$

$$\text{mit } v_{\text{phase}} = \frac{\omega}{k} \quad \text{in}$$

$$\begin{aligned} v_g(k) &= \partial_k (v_{\text{phase}} \cdot k) \\ &= v_{\text{phase}} - \lambda \frac{\partial v_{\text{phase}}}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

wobei $\lambda =$ Wellenlänge

In der Optik durchstrahlter Medien ist
 $\omega(k) = ck / n(\omega)$ (mit reellem $n(\omega)$)
und man erhält dafür sofort*)

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

$$\begin{aligned} *) \quad \frac{dn(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{ck}{\omega} \right) = \frac{\omega c \frac{dk}{d\omega} - ck \frac{d\omega}{d\omega}}{\omega^2} \\ &= \frac{\cancel{\omega} c / v_g - \cancel{\omega} \cdot n(\omega)}{\omega^2} \end{aligned}$$

$$\omega \frac{dn}{d\omega} = c / v_g - n(\omega)$$

$$\frac{c}{v_g} = \omega \frac{dn}{d\omega} + n(\omega)$$

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

Für normale Dispersion ist $\frac{dn}{d\omega} > 0$ und $n > 1$. Dann gilt

$$v_g < v_{\text{phase}} < c$$

Für anomale Dispersion kann $\frac{dn}{d\omega}$ sehr negativ werden. Dann ist v_g sehr verschieden von v_{phase} und $v_g > c$ ist möglich.

Falls $\rho(k)$ stark um einen Wert \bar{k} zentriert ist, dann gilt für die Geschw. des Wellenpakets

$$v = \left\langle \frac{\partial \omega(k)}{\partial k} \right\rangle = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\bar{k}} = v_g(\bar{k})$$

d.h. sie ist identisch zur Gruppengeschwindigkeit am Maximum des Spektrums.

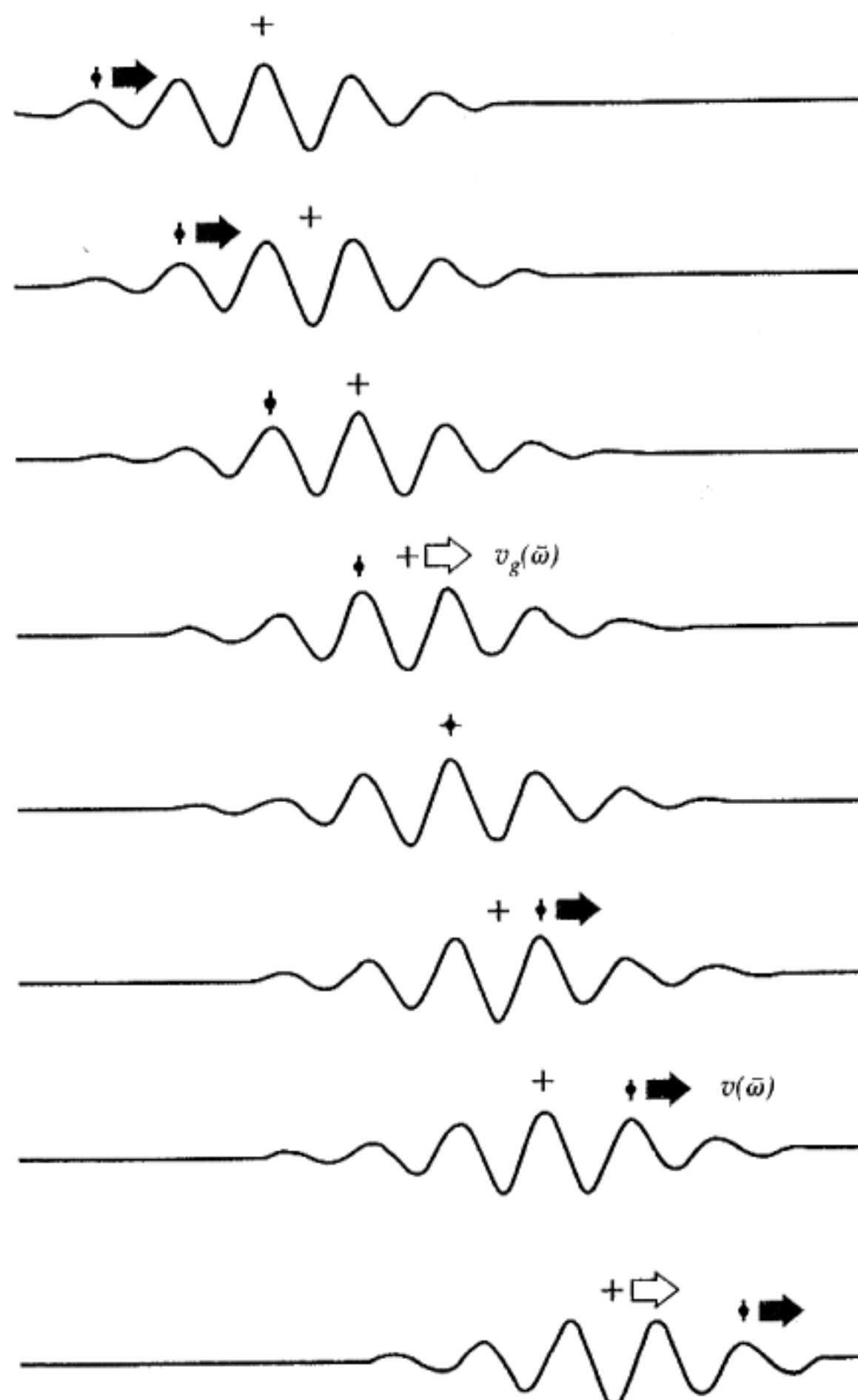


Figure 7.18 A wave pulse in a dispersive medium.

Fig 7.18 aus Hecht

Wir untersuchen nun weiter die Breite des Wellenpakets

$$\begin{aligned}
 \underline{\sigma^2(t)} &= \int dx \rho(x,t) (x - R(t))^2 \\
 &= \int dx \rho(x,t) (x^2 - 2x R(t) + R^2(t)) \\
 &= \int dx \rho(x,t) x^2 - R^2(t) \\
 &= \underline{\langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2}
 \end{aligned}$$

Wir berechnen nun weiter das 2te Moment

$$\begin{aligned}
 \langle x^2(t) \rangle &= \int dx \rho(x,t) x^2 \\
 &= \int dx \underbrace{(\phi^*(x,t) x)}_{= g^*} \underbrace{(\phi(x,t) x)}_{= g}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\stackrel{\text{Parseval}}{=} \int \frac{dk}{2\pi} (i \partial_k \hat{\phi}(k,t))^* (i \partial_k \phi(k,t)) \\
 &= \int \frac{dk}{2\pi} \left(t \frac{\partial \omega}{\partial k} a^* - i \frac{\partial a^*}{\partial k} \right) \left(t \frac{\partial \omega}{\partial k} a + i \frac{\partial a}{\partial k} \right) \\
 &= t^2 \left(\int dk \rho(k) \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 \right) + \alpha t + \beta
 \end{aligned}$$

wobei α und β in folgender nicht weiter ausgerechnet werden.

Wir betrachten nun weiter

$$\begin{aligned}
 \int dk \rho(k) \left[t \frac{\partial \omega}{\partial k} - v t \right]^2 &= \\
 &= \int dk \rho(k) \left[t^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 - 2 v t^2 \frac{\partial \omega}{\partial k} + v^2 t^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$= \int dk \rho(k) t^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial k} \right)^2 - (\omega t)^2$$

Folglich haben wir insgesamt

$$\sigma^2(t) = \int dk \rho(k) \left[t \frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega t \right]^2 + At + B$$

(A, B nicht weiter ausgerechnet)

Die Varianz hat also die Struktur

$$\sigma^2 = \delta^2 t^2 + At + B \quad (> 0, \neq 0)$$

$$\text{mit } \boxed{\delta^2 = \int dk \rho(k) \left[\frac{\partial \omega}{\partial k} - \omega \right]^2 \geq 0}$$

Schreibe mit $\sigma^2 = (\delta t - x_-)(\delta t - x_+)$

wobei x_{\pm} nicht reell sein können, da sich sonst ein Widerspruch zu $\sigma^2 \neq 0$ ergeben würde

$$x_{\pm} = x_0 \pm i x_1 \quad ; \quad x_0, x_1 \neq 0$$

$$\sigma^2 = (\delta t - x_0 - i x_1)(\delta t - x_0 + i x_1)$$

$$= (\delta t - x_0)^2 + x_1^2$$

$$= \delta^2 (t - t_0)^2 + x_1^2$$

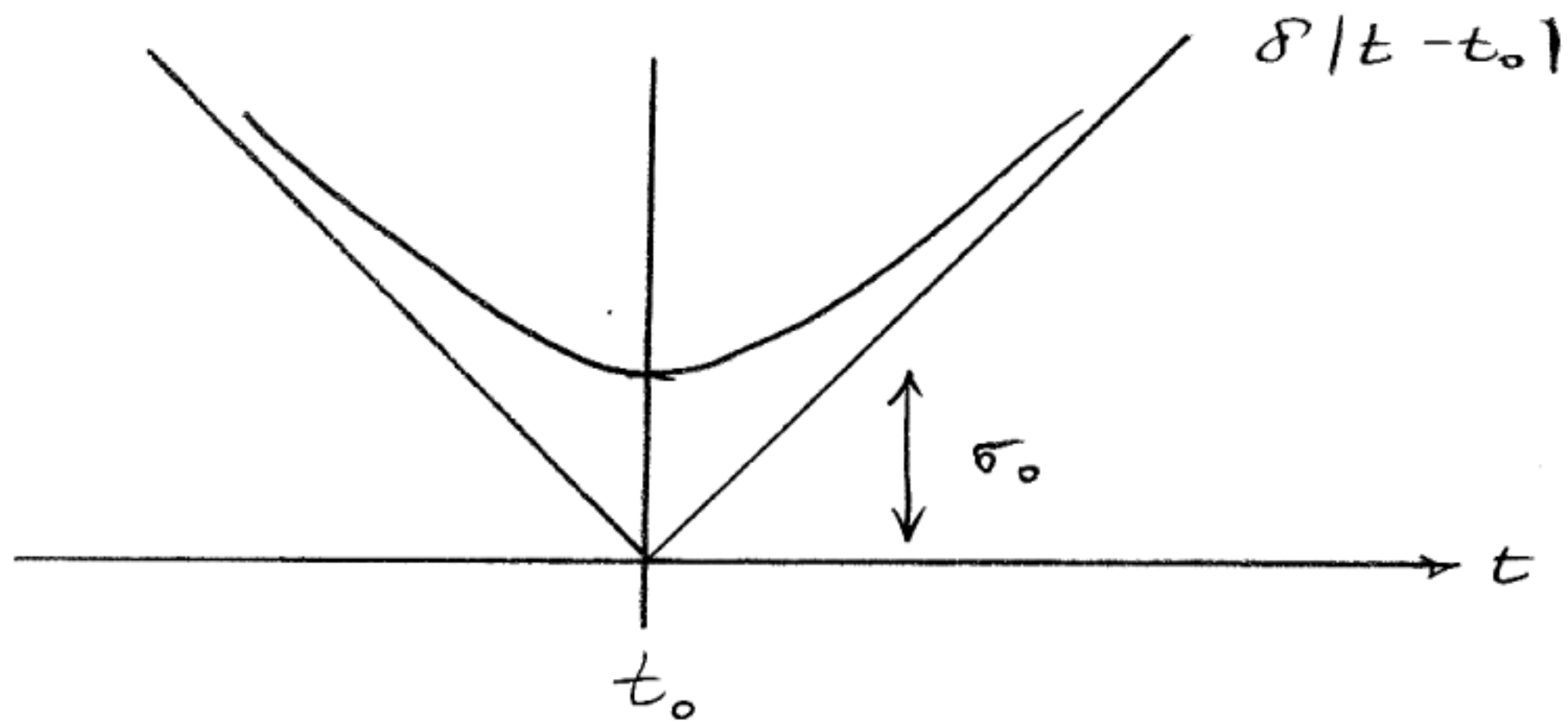
wobei t_0 durch die letzte Zeile definiert ist,

Dann gilt

$$\boxed{\sigma^2 = \delta^2 (t - t_0)^2 + \sigma_0^2 \quad , \quad \sigma_0 > 0}$$

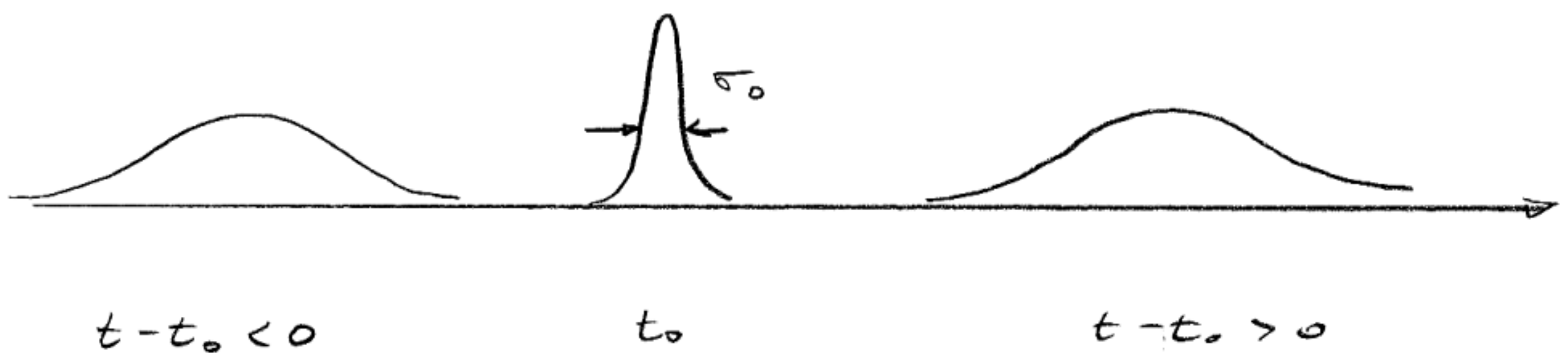
Fall $\omega = v k$, dann gilt $\delta = 0$
 d.h. für eine lineare Dispersion ergibt sich
 keine Verbreiterung des Wellenpakets
 (nicht dispersives Medium).

In allen anderen Fällen ist $\delta > 0$



Für $t \gg t_0$ wieder σ linear in $|t-t_0|$

Für $t \ll t_0$ fällt σ linear in $|t-t_0|$



Für stark zentrierte Spektren gilt

$\omega(k)$ kann in Taylorreihe um \bar{k} entwickelt werden

$$\omega(k) = \bar{\omega} + \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{\bar{k}} (k - \bar{k}) + \dots$$

$$v = v_g(\bar{k}) + \dots$$

Dann

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\approx \int dk \rho(k) \left(\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\bar{k}} \right)^2 (k - \bar{k})^2 \\ &= \left(\left. \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right|_{\bar{k}} \right)^2 \langle (k - \bar{k})^2 \rangle \end{aligned}$$

Übungen: Diskutieren das Gauß'sche Wellenpaket!

Illustration of the Spreading of a Pulse as It Propagates in a Dispersive Medium 329

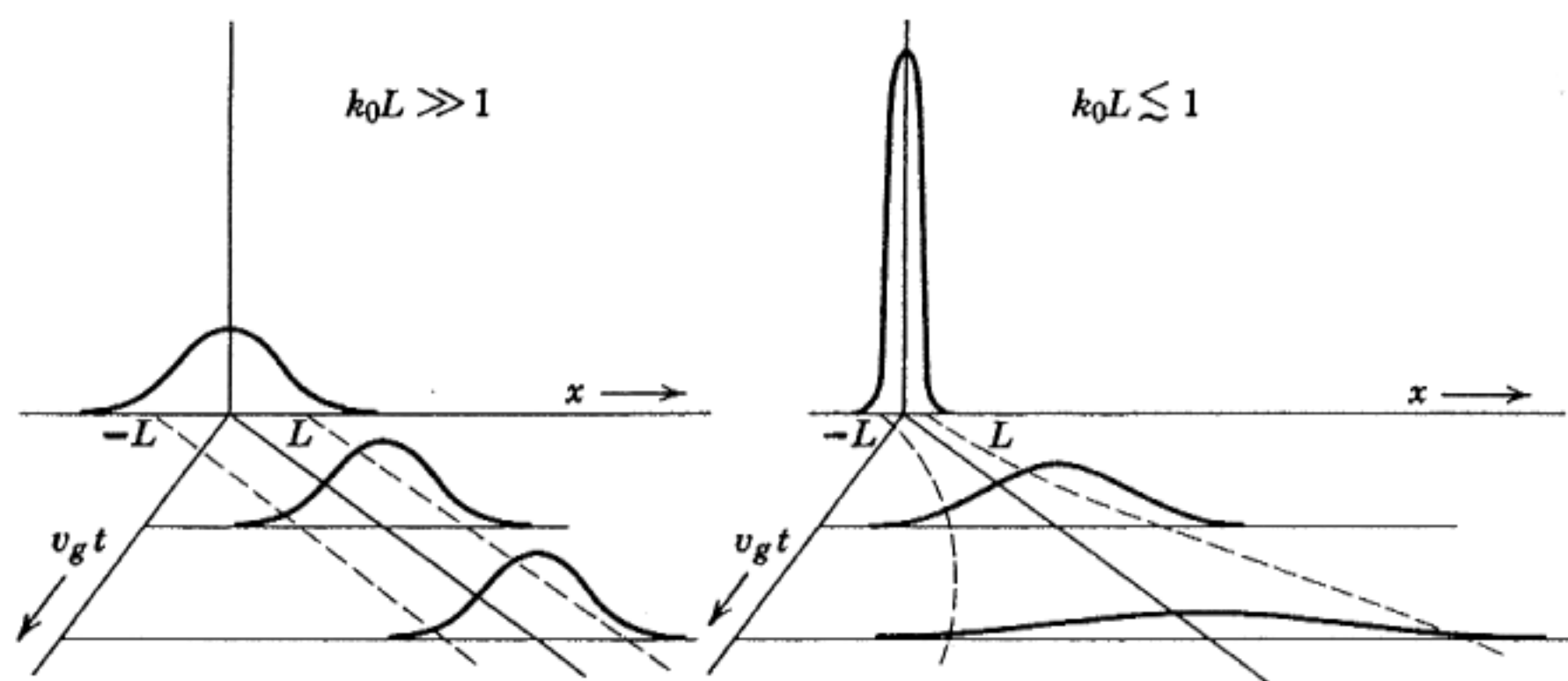


Figure 7.15 Change in shape of a wave packet as it travels along. The broad packet, containing many wavelengths ($k_0 L \gg 1$), is distorted comparatively little, while the narrow packet ($k_0 L \lesssim 1$) broadens rapidly.

Anwendung: Der optische Frequenzkamm

Ziel: Präzisionsmessung einer optischen Frequenz f_1 ($\sim 10^{15}$ Hz) mit der Genauigkeit 10^{-15} ($\Delta f_1 \sim 1$ Hz)!

Anders ausgedrückt: „Wie zählt man fehlerfrei von 0 auf 10^{15} in einer Sekunde?“

Die Genauigkeit 10^{-15} ist völlig absurd, solche Genauigkeiten werden mit Ausnahme der (Wasserstoff-)Spektroskopie in keinem physikalischen Experiment erreicht. Damit läßt sich die zeitliche Konstanz von Naturkonstanten überprüfen, z.B. die Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$.

Kann man sich 10^{15} veranschaulichen? 10^6 € entsprechen ungefähr dem durchschnittlichen Lebensinkommen in Deutschland, die Anzahl aller Menschen ist von der Größenordnung 10^9 .

Nimmt man also das Lebensinkommen aller zur Zeit lebenden Menschen - vorausgesetzt sie haben Löhne wie in der 1. Welt - , erhält man einen Betrag $\sim 10^{15}$ €.

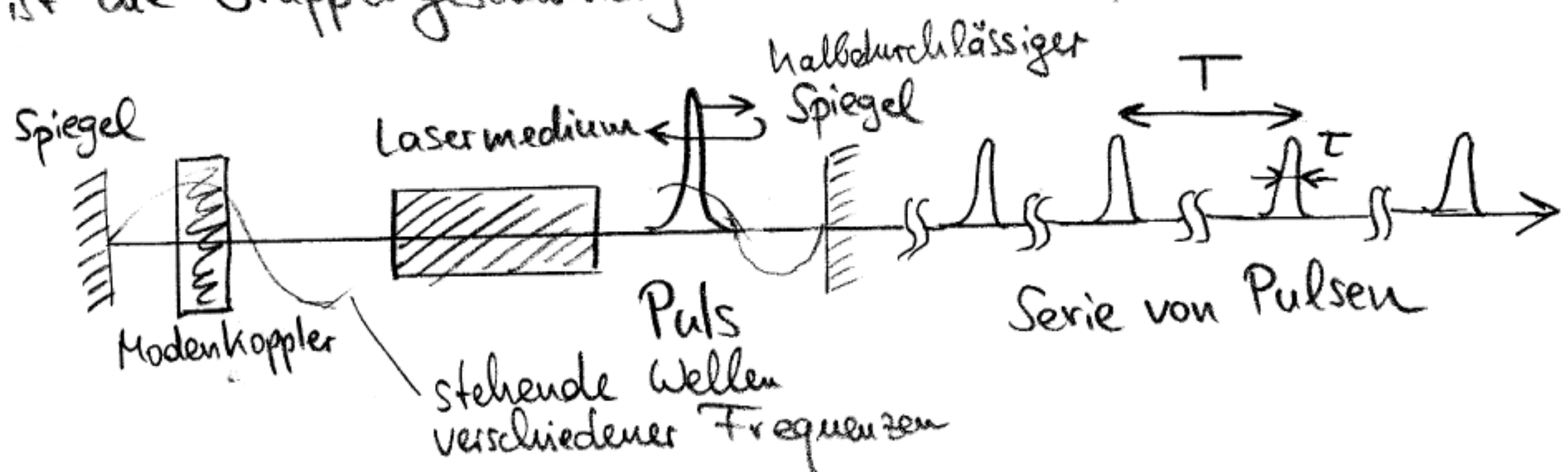
Zweites Beispiel: Eine Linie von München bis Rosenheim (70 km) enthält etwa 10^{15} Atome (10^{-10} m) - aber bitte nicht verzählen!

Methode: Überlagere das Signal mit einem Referenzsignal genau bekannter Frequenz $f_2 \approx f_1$ und messe die Schwebungsfrequenz: $f_{\text{sch}} = f_1 - f_2$. Diese Differenz kann beliebig klein werden, wenn man genügend Referenzfrequenzen hat. $f_{\text{sch}} \sim 1$ GHz läßt sich problemlos zählen (Computer), elektronische Messungen sind bis 100 GHz möglich.

Die Cs-Atomuhr als Standardreferenz tickt mit 9,2 GHz etwa 100000mal zu langsam. Um optische Frequenzen zu messen, muß man also die Lücke zwischen Licht und Mikrowellen überbrücken. Das ist mit einem optischen Frequenzkamm möglich, der die Referenz f_2 mit einer Genauigkeit 10^{-15} liefert. → Theodor Hänsch und John Hall, Nobelpreis 2005.

Ein diskretes Frequenzspektrum erfordert eine zeitliche periodische Pulsfolge. Diese erhält man aus modenkoppelten Lasern. Diese haben keine stehende Welle im Resonator, sondern verstärken einen hin- und herlaufenden Puls. Um einen breiten Frequenzkamm zu erhalten, muß das Lasermedium ein breites Frequenzband verstärken. Man benutzt z.B. Titan-Saphir-Laser, neuerdings auch erbium- oder ytterbiumdotierte Faserlaser. Bei letzteren besteht der Resonator aus einem geschlossenen Ring aus optischen Fasern.

- ein kurzer Puls der Dauer $\tau \approx 20\text{fs}$ läuft im Resonator des Lasers umher, Resonatorlänge z.B. $L = 25\text{cm}$.
Dann ist der Abstand zwischen den Pulsen $T = \frac{v_g}{2L}$,
 v_g ist die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets.



- Pulsdauer \Rightarrow Breite des Spektrums $\approx \frac{1}{\tau} \approx 50\text{THz}$
- Wiederholrate: $\frac{1}{T} = f_r = \frac{v_r}{2L} \approx 600\text{MHz}$
 f_r ist „langsam“, d.h. elektronisch sehr genau meßbar
 $\Delta f_r \sim 1\text{Hz}$

Die Einhüllende des Pulses läuft mit v_g , die Trägerwelle jedoch mit der Phasengeschwindigkeit v_{phase} . Das führt je Runde zu einer Phasenverschiebung $\Delta\varphi$ zwischen Einhüllender und Trägerwelle.

\Rightarrow die Einhüllende ist zwar periodisch, aber das elektrische Feld nicht.

Wir schreiben einen einzelnen Puls mit Trägerfrequenz ω_c (carrier) als $E_p(t) = a_p(t) e^{-i\omega_c t} + \text{c.c.}$ bei $x=0$.

\uparrow damit $E_p(t)$ reell ist

[ähnlich wie in der letzten Vorlesung für das Gaußsche Paket $\phi(x) = e^{ik_p x} \phi_0(x)$, jetzt an festem Ort statt bei fester Zeit.]

Dann ist eine Serie von Pulsen mit "Phasenschlupf" $\Delta\varphi$:

$$E(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_p(t-nT) e^{-i\omega_c t} e^{-in\Delta\varphi} + \text{c.c.}$$

Das Spektrum dieses Signals erhalten wir durch Fourier-Transformation:

$$E(x,t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{E}(x,\omega), \quad \hat{E}(x,\omega) = \hat{a}(\omega) e^{ik(\omega)x}$$

$$\hat{a}(\omega) = \int dt e^{i\omega t} E(x=0,t)$$

$$= \int dt e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_p(t-nT) e^{-i\omega_c t} e^{-in\Delta\varphi} + \text{c.c.} \quad \omega \leftrightarrow -\omega$$

$$t' = t - nT = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dt' e^{i(\omega - \omega_c)(t'+nT)} a_p(t') e^{-in\Delta\varphi} + \dots$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i(\omega - \omega_c - \frac{\Delta\varphi}{T})nT} \underbrace{\int dt' e^{i(\omega - \omega_c)t'} a_p(t')}_{\hat{a}_p(\omega - \omega_c)} + \dots$$

$$= \hat{a}_p(\omega - \omega_c) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left[i\left(\omega - \omega_c - \frac{\Delta\varphi}{T}\right)nT\right] + \dots$$

Benutze Darstellung der 2π -periodischen δ -Funktion:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inx} = \delta_{2\pi}(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - 2\pi n),$$

außerdem ist $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

$$\hat{a}(\omega) = \hat{a}_p(\omega - \omega_c) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{T} \delta\left(\omega - \omega_c - \frac{\Delta\varphi}{T} - \frac{2\pi n}{T}\right) + \dots$$

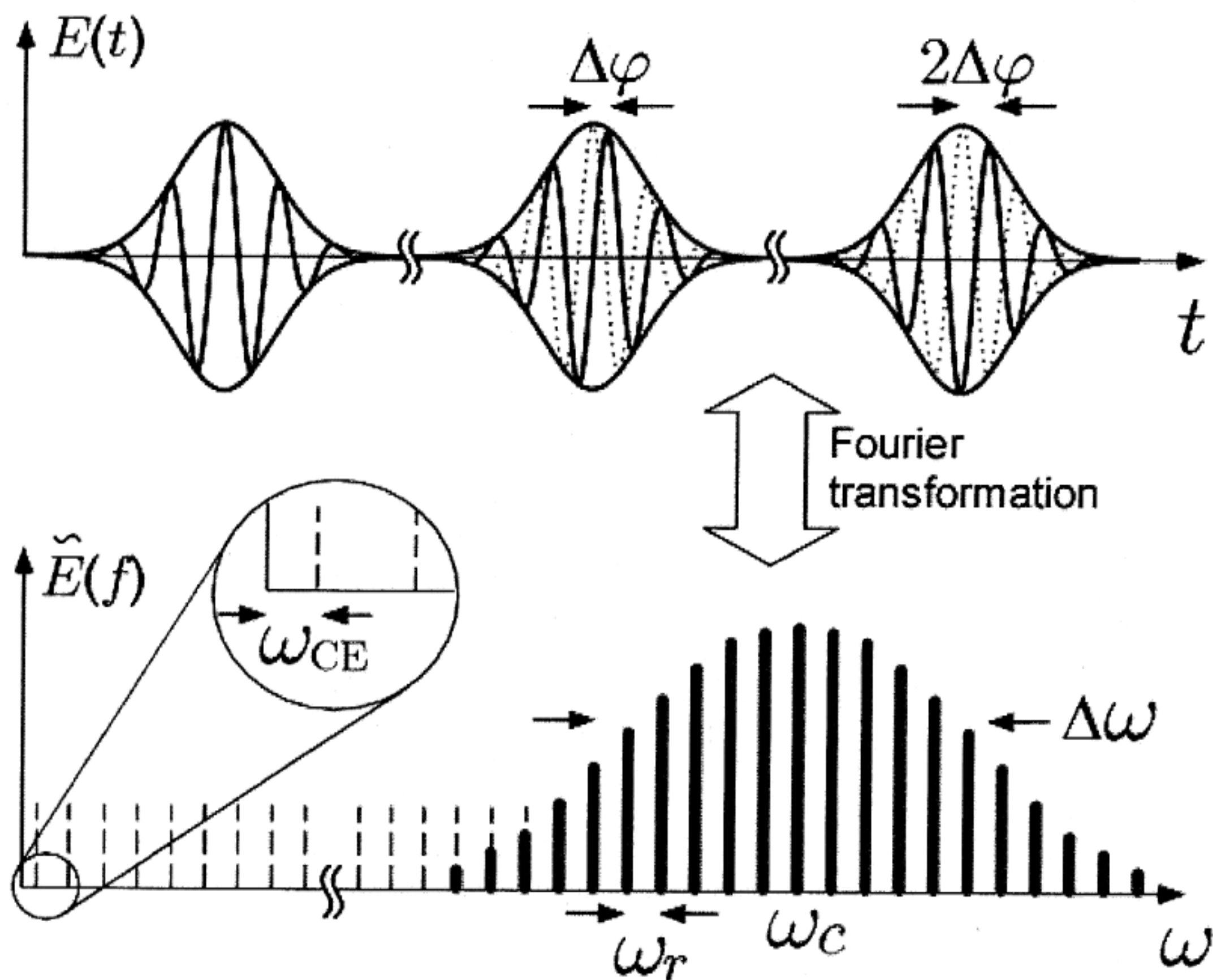
Definiere $\omega_r := \frac{2\pi}{T}$ und offset ω_0 durch

$$\omega_0 + m\omega_r = \omega_c + \frac{\Delta\varphi}{T} \quad \text{so, daß } \omega_0 < \omega_r$$

\Rightarrow Umnummerierung:

$$\hat{a}(\omega) = \hat{a}_p(\omega - \omega_c) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_r \delta(\omega - \omega_0 - n\omega_r) + \text{c.c.} \quad \omega \leftrightarrow -\omega$$

Ergebnis: Das Spektrum ist ein Frequenzkamm mit äquidistanten Frequenzen $\omega_0, \omega_0 + \omega_r, \dots$
 $\dots \omega_0 + n\omega_r, \omega_0 + (n+1)\omega_r, \dots$
 Die Stärke / Intensität der Linien wird von der Einhüllenden $\hat{a}_p(\omega - \omega_c)$ bestimmt, das Spektrum aus diskreten Linien ist also um ω_c konzentriert.
 Der Linienabstand wird von der Pulswiederholrate bestimmt, $\omega_r = \frac{2\pi}{T}$.



Durch Messung des Abstands $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}$ und des Offsets $f_0 = \frac{\omega_r}{2\pi}$ sind sämtliche Frequenzen des Kamms bestimmt. Beide Frequenzen sind im Radiobereich ($\sim 1\text{GHz}$) und lassen sich elektronisch zählen ($\delta f \sim 1\text{Hz}$). Der Sprung zu optischen Frequenzen $f_n = f_0 + n f_r$ ($\sim 10^{15}\text{Hz}$) geschieht durch sehr große $n \sim 10^6$. Es ist erstaunlich, daß die

guten Kammereigenschaften (Kohärenz und Äquidistanz)
selbst für so große n erhalten bleiben.

Moderne Frequenzkämme umfassen bis zu 10^6 diskrete
Linien und überdecken das gesamte optische Spektrum (400-800 THz)
mit einem feinen Raster im GHz-Bereich. Insbesondere
enthalten sie eine ganze Oktave, d.h. neben der (roten)
Frequenz $f_n = n f_r + f_0$ enthalten sie auch die (blaue) Frequenz
 $f_{2n} = 2n f_r + f_0$.

Solch ein breites Spektrum erreicht man nicht mehr direkt
durch immer kürzere Pulsdauern. Stattdessen verbreitert man
einen schmalen Frequenzkamm mit Hilfe nichtlinearer
Effekte. Dabei kann man erreichen, daß die Phasen-
kohärenz und Äquidistanz der einzelnen Linien erhalten bleibt.

Messung von f_r und f_0 :

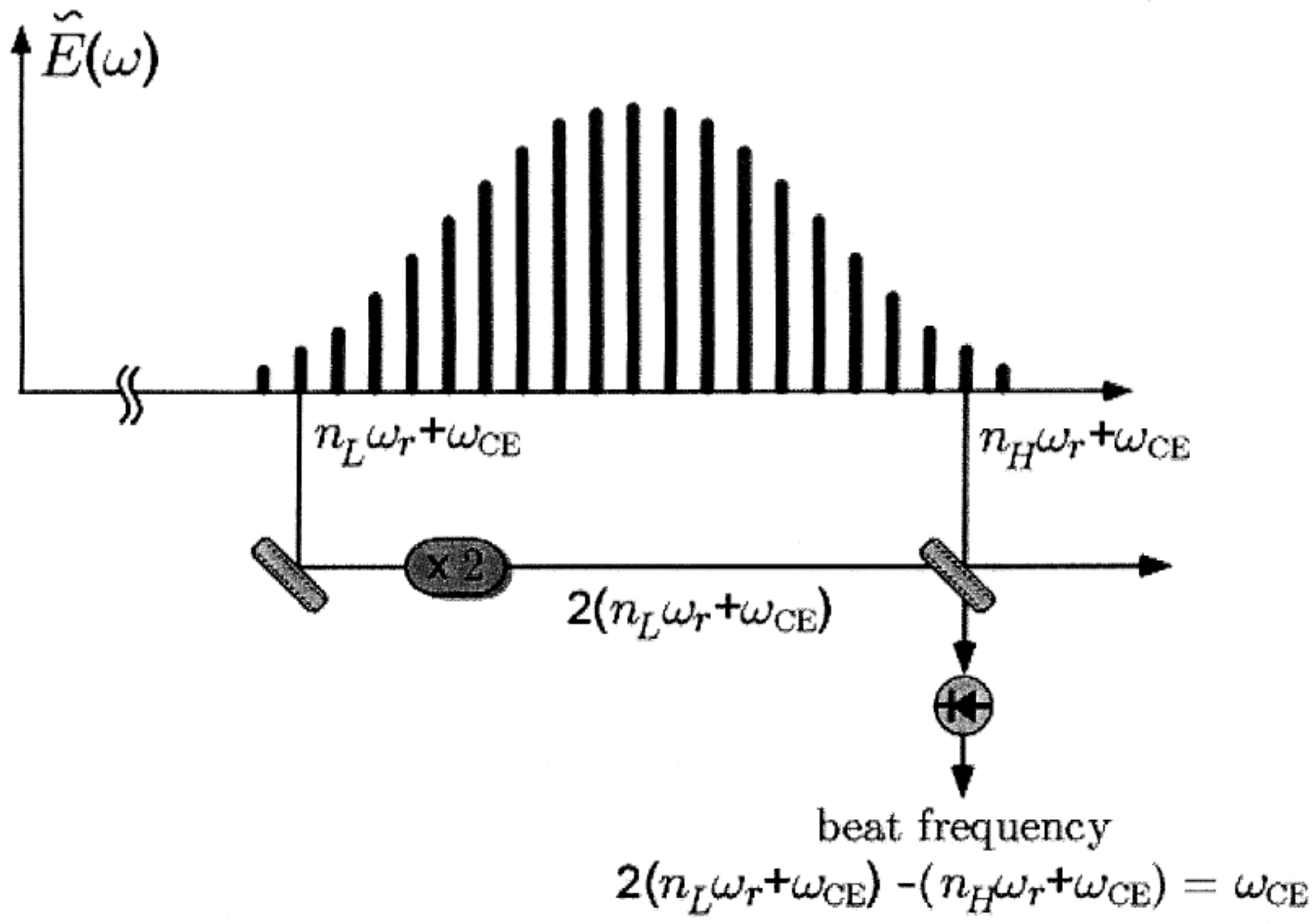
- Die Pulsfrequenz f_r bestimmt man leicht mit einer
Photodiode, indem man die Intensität der auftreffenden
Pulse registriert.
- Die Offsetfrequenz f_0 erhält man mit überschaubarem
Aufwand, wenn der Kamm eine ganze Oktave überdeckt:
 - verdopple die rote Frequenz f_n zu $2f_n = 2(n f_r + f_0)$
 - überlagere diese mit der blauen Frequenz $f_{2n} = 2n f_r + f_0$ \Rightarrow die Schwebungsfrequenz $2f_n - f_{2n} = f_0$ läßt sich
wieder mit einer Photodiode messen.

zur Schwebung:

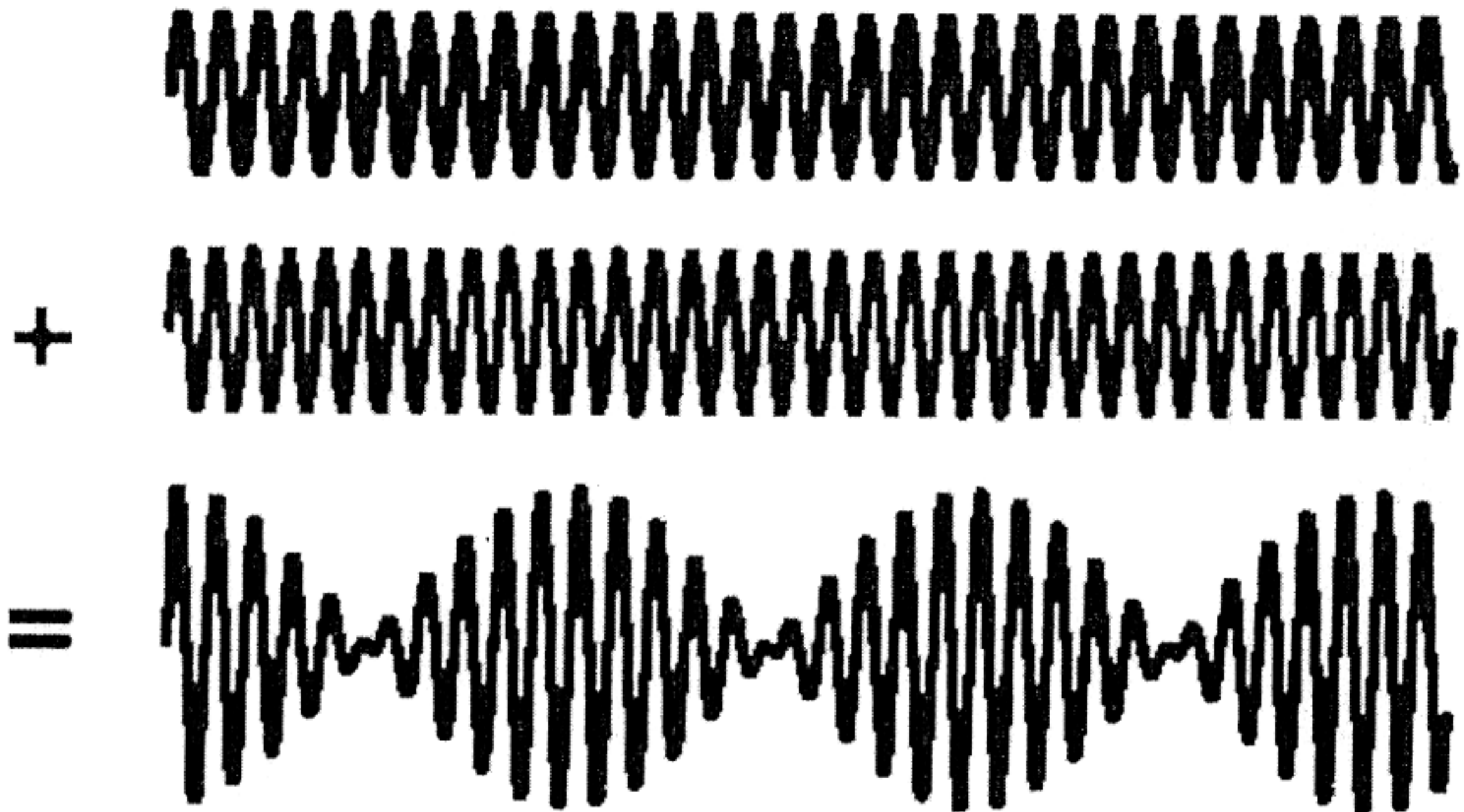
überlagere $E_1(t) = E \cos(\omega_1 t)$ und $E_2 = E \cos(\omega_2 t)$,
dann ist die gemessene Intensität:

$$J(t) = |E_1(t) + E_2(t)|^2 = E^2 [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]^2$$
$$= E^2 [\cos((\omega_1 - \omega_2)t) + 1] [\cos((\omega_1 + \omega_2)t) + 1]$$

langsame Schwebungsfrequenz $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\pi}$



beat note



Wie funktioniert nun die Absolutmessung einer unbekanntem Frequenz f_x ?

- 1) Eichung des Frequenzkamms, z.B. mittels einer Cs-Atomuhr
⇒ Bestimmung von f_0 und f_r (und Stabilisierung des Kamms)
- 2) grobe Bestimmung der unbekanntem Frequenz f_x mit herkömmlichen Methoden (Genauigkeit 10^{-6})
⇒ Ermittlung der Referenzmode $f_n = n f_r + f_0$,
also der ganzen Zahl n (Größenordnung 10^6 !)
- 3) Interferenz des unbekanntem Signals mit dem gesamten Kamm ⇒ die langsamste Schwebungsfrequenz f_s liefert die Differenz $f_x - f_n$.
[Schwebungen mit benachbarten Referenzmoden sind um f_r größer, d.h. deutlich unterscheidbar.]

Damit ist f_x auf ~ 1 Hz genau bestimmt, für optische Frequenzen erreicht man also eine Genauigkeit 10^{-15} .

Weitere Informationen:

Udem, Holzwarth & Hänsch, Nature 416, 233 (2002).

<http://www.mpg.mpg.de/~haensch/comb/research.html>

5. Wellenfelder an einfachen Grenzflächen

5.1. Lineare Feldtheorie für Schichtstrukturen

Wir verallgemeinern die Feldgleichungen in 4.1 zu

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\{n_i\}} C_{n_0 \dots n_d}^{\beta\alpha}(\vec{x}) \partial_t^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_{\alpha}(\vec{x}, t) = \Gamma_{\beta}(\vec{x}, t)$$

Koeffizienten sind ortsabhängig

Ansatz: Monochromatisches Feld

$$F_{\alpha}(\vec{x}, t) = F_{\alpha}^{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

$$\Gamma_{\alpha}(\vec{x}, t) = \Gamma_{\alpha}^{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t} \quad \checkmark$$

$$(*) \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\{n_i\}} C_{n_0 \dots n_d}^{\beta\alpha}(\vec{x}) (-i\omega)^{n_0} \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d} F_{\alpha}^{\omega}(\vec{x}) = \Gamma_{\beta}^{\omega}(\vec{x})$$

also eine Differentialgleichung im Ortsraum.

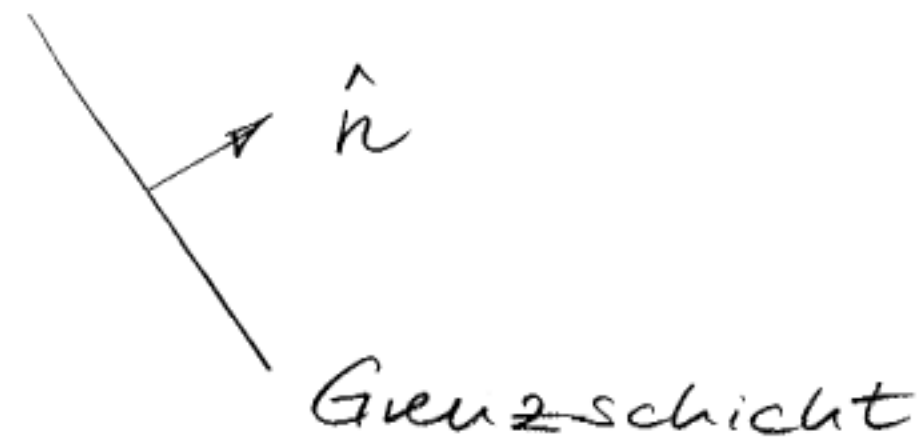
Satz: Jede Lösung der Feldtheorie ist eine Superposition von monochromatischen Funktionen

$$F_{\alpha}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} F_{\alpha}^{\omega}(\vec{x}) e^{-i\omega t}$$

wobei $F_{\alpha}^{\omega}(\vec{x})$ Lösung von (*) ist

In folgendem werden wir nur die homogenen Feldgleichungen betrachten, also $\Gamma \equiv 0$,

Wellenfelder an Schichten



Wir setzen voraus, daß die Koeffizienten der Feldtheorie $C_{\dots}^{\beta\alpha}(\vec{x})$ auf Hyperebenen $\perp \vec{n}$ konstant sind.

Wir legen \vec{n} so, daß $\vec{n} = (0, \dots, 0, 1)$;
 $\vec{x} = (\vec{y}, z)$, $z \perp$ Schicht $\rightsquigarrow C_{\dots}^{\beta\alpha}(z)$

Wir können dann den Ansatz machen

$$F_{\alpha}^{\omega}(\vec{x}) = e^{i\vec{p} \cdot \vec{y}} F_{\alpha}^{\omega, \vec{p}}(z)$$

wobei $F_{\alpha}^{\omega, \vec{p}}$ Fourierkoeffizienten sind

$$\vec{p} \cdot \vec{y} = p_1 y_1 + \dots + p_{d-1} y_{d-1}$$

$$\vec{y} \in \mathbb{E}^{d-1}, \quad \vec{p} \in \mathbb{E}^{d-1}$$

($d-1$ dim euklidische Räume)

\vec{p} heisst Wellenvektor \parallel Schicht ($\perp \vec{n}$)

Obiger Ansatz ist dann Lösung von

$$\oplus \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\omega} C_{\omega}^{\beta\alpha}(\omega, \vec{p}, z) \left(\frac{d}{dz}\right)^n F_{\alpha}^{\omega, \vec{p}}(z) = 0$$

wobei

$$n = n_d$$

$$C_{\omega}^{\beta\alpha}(\omega, \vec{p}, z) = \sum_{\{n_0, \dots, n_{d-1}\}} C_{n_0, \dots, n_{d-1}}^{\beta\alpha}(z) (-i\omega)^{n_0}$$

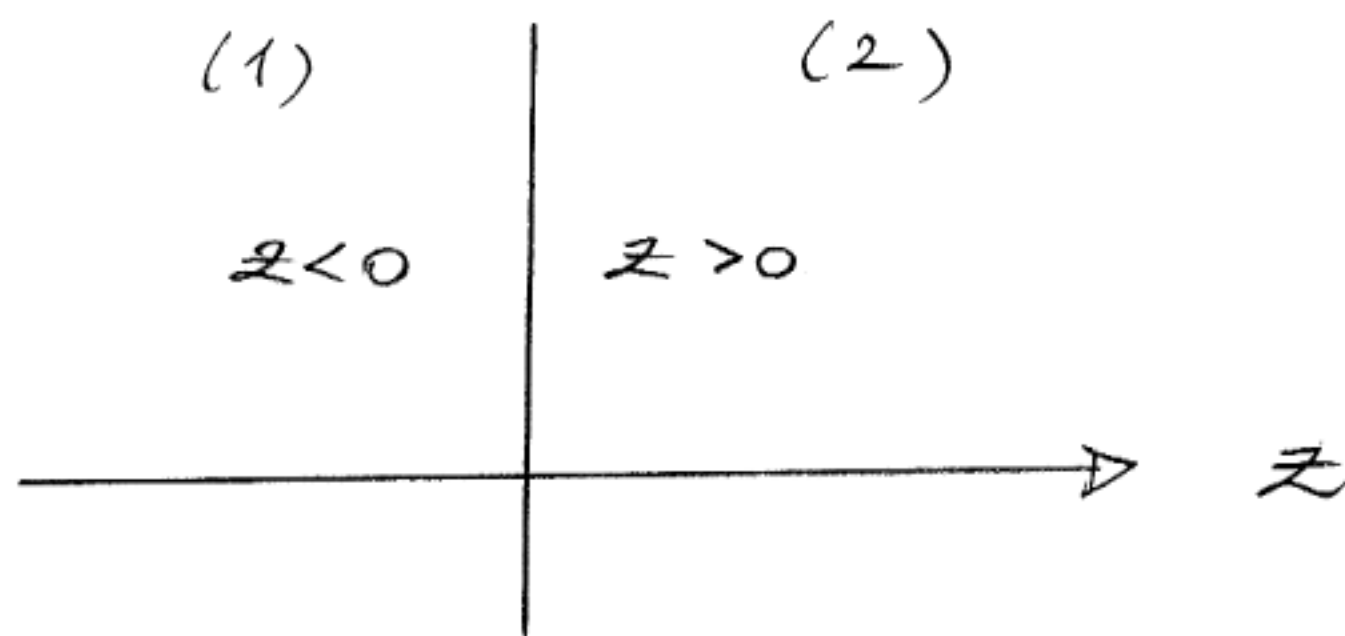
$$(ip_1)^{n_1} \dots (ip_{d-1})^{n_{d-1}}$$

Satz: Jede Lösung zu (*) lässt sich schreiben als Superposition

$$F_{\alpha}^{\omega}(\vec{y}, z) = \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{y}} F_{\alpha}^{\omega\vec{p}}(z)$$

wobei $F_{\alpha}^{\omega\vec{p}}$ Lösung von (*)

Einfache Grenzflächen



Das Medium ist in (1) und (2) jeweils homogen, d.h. in (1) und (2) besteht jeweils eine freie Feldtheorie vorliegen.

Der Anschluss erfolgt über Randbedingungen.

(Die Verallgemeinerung zu mehreren Grenzschichten ist trivial: (1) | (2) | (3) | ...)

Satz: In jedem Halbraum ist die Lösung der Feldgleichungen eine Superposition

$$F_{\alpha, \nu}^{\omega\vec{p}}(z) = e^{iK_{\nu}z} F_{\alpha, \nu}^{\omega\vec{p}}$$

mit $K_1, \dots, K_{\nu_{\max}}$ charakter. Wurzeln (EW)

K_{ν}, F_{ν} folgen aus den algebraischen

Gleichungen

$$\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\nu} C_{\nu}^{\beta\alpha(1,2)} (iK_{\nu})^{\nu} F_{\alpha, \nu}^{\omega\vec{p}} = 0$$

+ Randbedingungen

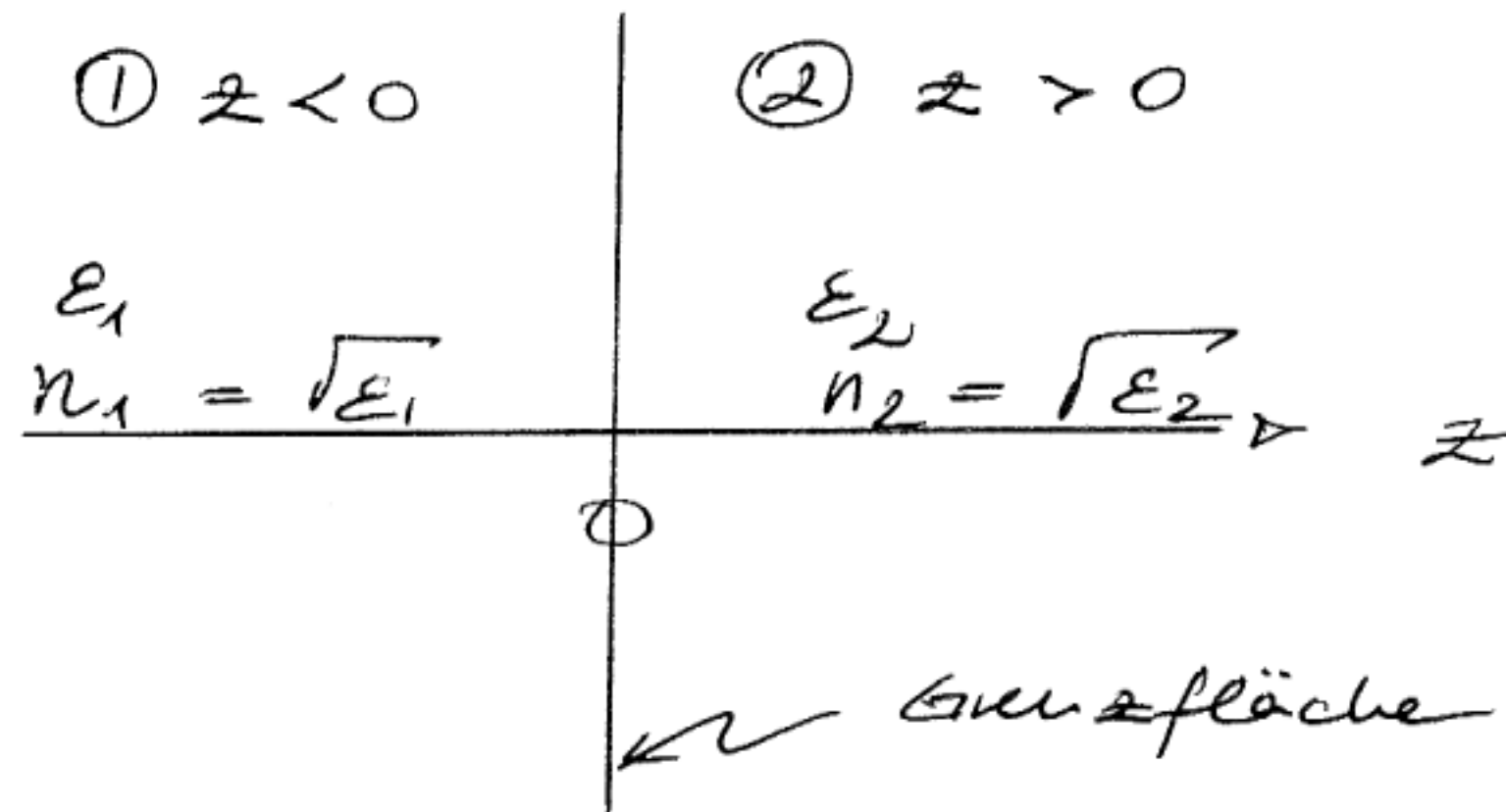
Komplexe Lösung

$$F_{\alpha}(\vec{y}, z, t) = \sum_{\nu} \int \frac{d^{d-1}p}{(2\pi)^{d-1}} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} e^{i\vec{p}\vec{y}} e^{iK_{\nu}z} F_{\alpha, \nu}^{\omega, \vec{p}}$$

Die Physik steckt in K_{ν}
und den Amplituden $F_{\alpha, \nu}^{\omega, \vec{p}}$.

5.2. Reflexion und Transmission an idealem Dielektrikum

Betrachte eine ebene Grenzfläche zwischen
idealen Dielektrika mit konstanten DK'n.



Die Dispersionsrelation in einem idealen
homogenen Dielektrikum lautet

$$\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2 \quad \left(v = \frac{c}{n} \right)$$

wobei $n = \sqrt{\epsilon}$

als Brechungsindex bezeichnet wird

Wir teilen den Wellenvektor \vec{k} auf in
Komponenten parallel und senkrecht zur
Grenzfläche

$$\vec{k} = \vec{p} + \vec{k}$$

$\vec{p} = 0$ heißt senkrechter Einfall.

In diesem Unterkapitel befassen wir uns mit dem Spezialfall des senkrechten Einfalls auf die Grenzfläche ($\vec{p} = 0$).
Dann gilt

$$\kappa_{\pm} = \pm \frac{n}{c} \omega$$

$$\vec{k}_{\pm} = (0, 0, \kappa_{\pm})$$

$$\vec{E}^{\pm}(z) = \begin{pmatrix} E_x^{\pm} \\ E_y^{\pm} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i \frac{n}{c} \omega z} + \begin{pmatrix} E_x^{\mp} \\ E_y^{\mp} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{n}{c} \omega z}$$

$$\vec{B}^{\pm}(z) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^{-1} \vec{k}_{\pm} \times \vec{E}^{\pm}(z)$$

$$= n \left[\begin{pmatrix} -E_y^{\pm} \\ E_x^{\pm} \\ 0 \end{pmatrix} e^{i \frac{n}{c} \omega z} + \begin{pmatrix} E_y^{\mp} \\ -E_x^{\mp} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i \frac{n}{c} \omega z} \right]$$

ist allgemeine Lösung (Summe aus rechts- und linkslaufender Welle) für die Fourierkomponenten $\vec{E}^{\pm}(z)$ und $\vec{B}^{\pm}(z)$; hier bezeichnen dann jeweils den Brechungsindex in den Gebieten ① oder ②.

Zur weiteren Analyse verwenden wir nun die in Kapitel 3.4. abgeleiteten Stetigkeitsbedingungen:

$$(1) \quad E_z \text{ stetig} \Rightarrow E_x^{+(1)} + E_x^{- (1)} = E_x^{+(2)} + E_x^{- (2)}$$

ebenso für y-Komponente

$$(2) \quad B_z \text{ stetig} \Rightarrow n_1 (E_x^{+(1)} - E_x^{- (1)}) = n_2 (E_x^{+(2)} - E_x^{- (2)})$$

ebenso für y-Komponente

Wir nehmen nun die folgende Fallunterscheidung vor

(a) $E_y \equiv 0$; elem. Welle in x-Richtung lin. pol.

(b) $E_x \equiv 0$; " " in y-Richtung " "

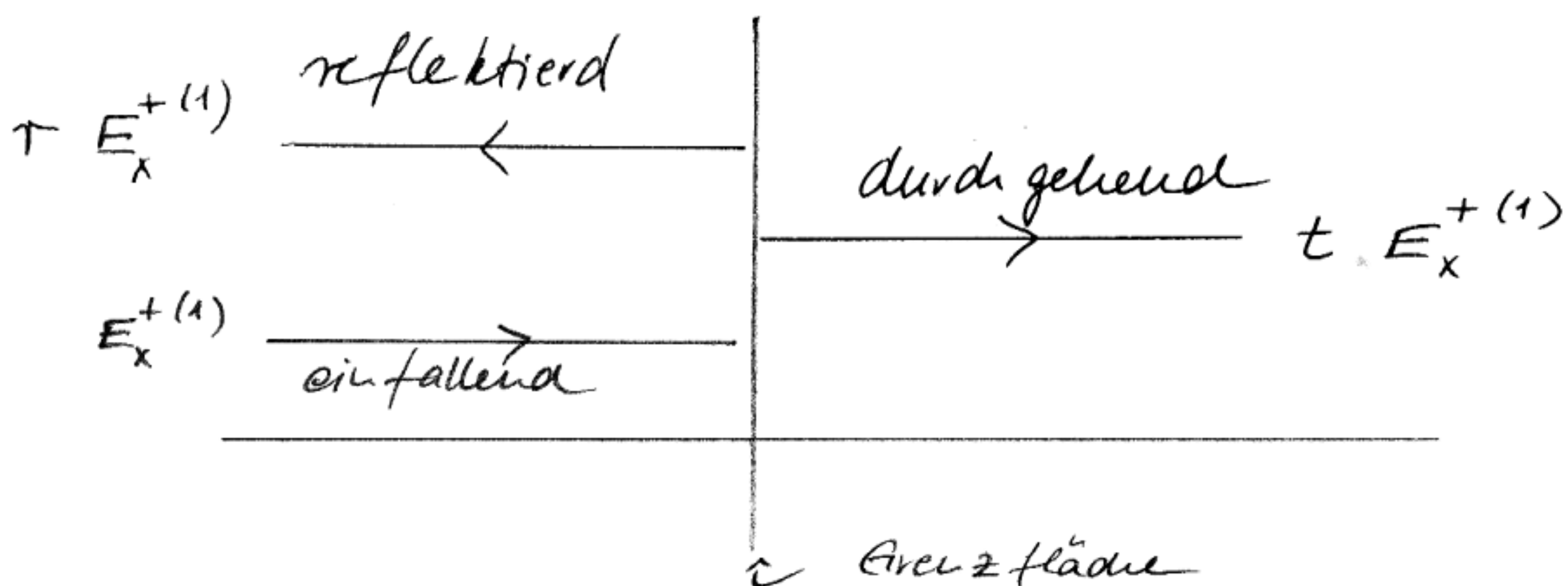
Fall (1) Sei $E^{-(2)} = 0$, d.h. wir betrachten eine von links einfallende Welle. Dann folgt aus den Stetigkeitsbedingungen (1) und (2)

$$n_1(1) + (2) : \quad 2n_1 E_x^{+(1)} = n_1 (E_x^{+(2)} + E_x^{-(2)}) + n_2 (E_x^{+(2)} - E_x^{-(2)})$$

$$\leadsto 2n_1 E_x^{+(1)} = (n_1 + n_2) E_x^{+(2)} + (n_1 - n_2) \cancel{E_x^{-(2)}} = 0$$

$$n_2(1) - (2) \quad \leadsto (n_1 + n_2) E_x^{+(1)} + (n_2 - n_1) E_x^{-(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} E_x^{+(2)} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_x^{+(1)} \\ E_x^{-(1)} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_x^{+(1)} \end{array}$$



Damir ergibt sich

Reflexionskoef.

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

Transmissionskoef.:

$$t = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Die allgemeine Lösung findet man durch Superposition (siehe 5.1)

$$E_x(z, t) = \underbrace{\Theta(z)}_{\text{durchgehend}} E_t(z, t) + \underbrace{\Theta(-z)}_{\text{einfallend + reflektiert}} [E_i(z, t) + E_r(z, t)]$$

wobei

$$E_i(z, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} E_x^{+(1)}(\omega) e^{i\left(\frac{n_1}{c}\omega z - \omega t\right)}$$
$$= \int dk a(k) e^{i(kz - \omega_1(k)t)}$$

$$\text{mit } \omega_1(k) = v_1 k, \quad v_1 = \frac{c}{n_1}$$

$$\text{und } k = \frac{n_1 \omega}{c}$$

$$a(k) = \frac{c}{2\pi n_1} E_x^{+(1)}\left(\frac{c}{n_1} k\right)$$

$$E_r = \int dk a(k) \cdot r e^{i(-kz - \omega_1(k)t)}$$

$$E_t = \int \frac{d\omega}{2\pi} E_x^{+(2)}(\omega) t e^{i\left[\frac{n_2}{c}\omega z - \omega t\right]}$$

$$= \int dk \cdot \frac{c}{n_2} \frac{1}{2\pi} E_x^{+(2)}\left(\frac{c}{n_2} k\right) t e^{i(kz - \omega_2(k)t)}$$

$$k := \frac{n_2 \omega}{c}$$

$$\omega_2 = \frac{c}{n_2} k = v_2 k$$

$$= \int dk \frac{c}{2\pi n_1} E_x^{+(2)}\left(\frac{c}{n_2} k\right) \frac{n_1}{n_2} t e^{i(kz - \omega_2(k)t)}$$

5.3. Wellenausbreitung und Felddiffusion in leitenden Medien

In diesem Kapitel untersuchen wir die Wellenausbreitung in leitenden Medien. Der Einfachheit wegen beginnen wir mit dem Materiemodell eines Ohmschen Leiters:

$$\begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho \qquad \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (\text{Ohm'sches Gesetz}) \end{array}$$

($\mu = \epsilon = 1$) statische magn. und el. Permeabilität

Aus der Kontinuitätsgleichung für Ladungen und dem Ohmschen Gesetz folgert man

$$0 = \partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_t \rho + \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

oder mit dem Coulombschen Gesetz

$$\partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + 4\pi \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

In Frequenzraum gibt dann

$$(-i\omega + 4\pi\sigma) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\omega = 0$$

oder mit $\boxed{\epsilon(\omega) := 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}$ als der frequenzabh. DK des Ohmschen Leiters

$$\boxed{\epsilon(\omega) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}^\omega = 0,}$$

Eliminiert man nun aus dem Faraday'schen Induktionsgesetz und dem Ampere-Maxwell'schen Durchflutungsgesetz das Magnetfeld \vec{B} ,

10 ergibt sich die Telegraphengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \vec{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

(Die rechte Seite wirkt als Dämpfung).
Sie lässt sich durch Übergang in den
Frequenzraum auf die Form einer Helmholtz-
Gleichung bringen

$$\Delta \vec{E}^\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{\left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)}_{\substack{\uparrow = \epsilon(\omega) \\ \text{Verdrängungsstrom} \quad \uparrow \\ \text{Leitungsstrom}}} \vec{E}^\omega = 0$$

$$\Delta \vec{E}^\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon(\omega) \vec{E}^\omega = 0$$

Im Frequenzraum lauten die Faraday
und Ampere-Maxwell Gleich

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E}^\omega - \frac{i\omega}{c} \vec{B}^\omega &= 0 \\ \text{rot } \vec{B}^\omega + \frac{i\omega}{c} \epsilon(\omega) \vec{E}^\omega &= 0 \end{aligned}$$

Weiter gibt noch $\text{div } \vec{B}^\omega = 0$.
Dann haben wir für den dünnen Leiter formal
dieselben Maxwellgleichungen wie für ein
Dielektrikum mit einer komplexen
frequenzabhängigen DK.

Damit lautet der komplexe Brechungsindex für einen Omnischer Leiter

$$n = \sqrt{\epsilon} = \sqrt{1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

Dies läßt sich auf den Fall eines Drude Modells verallgemeinern:

$$n(\omega) = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}}$$

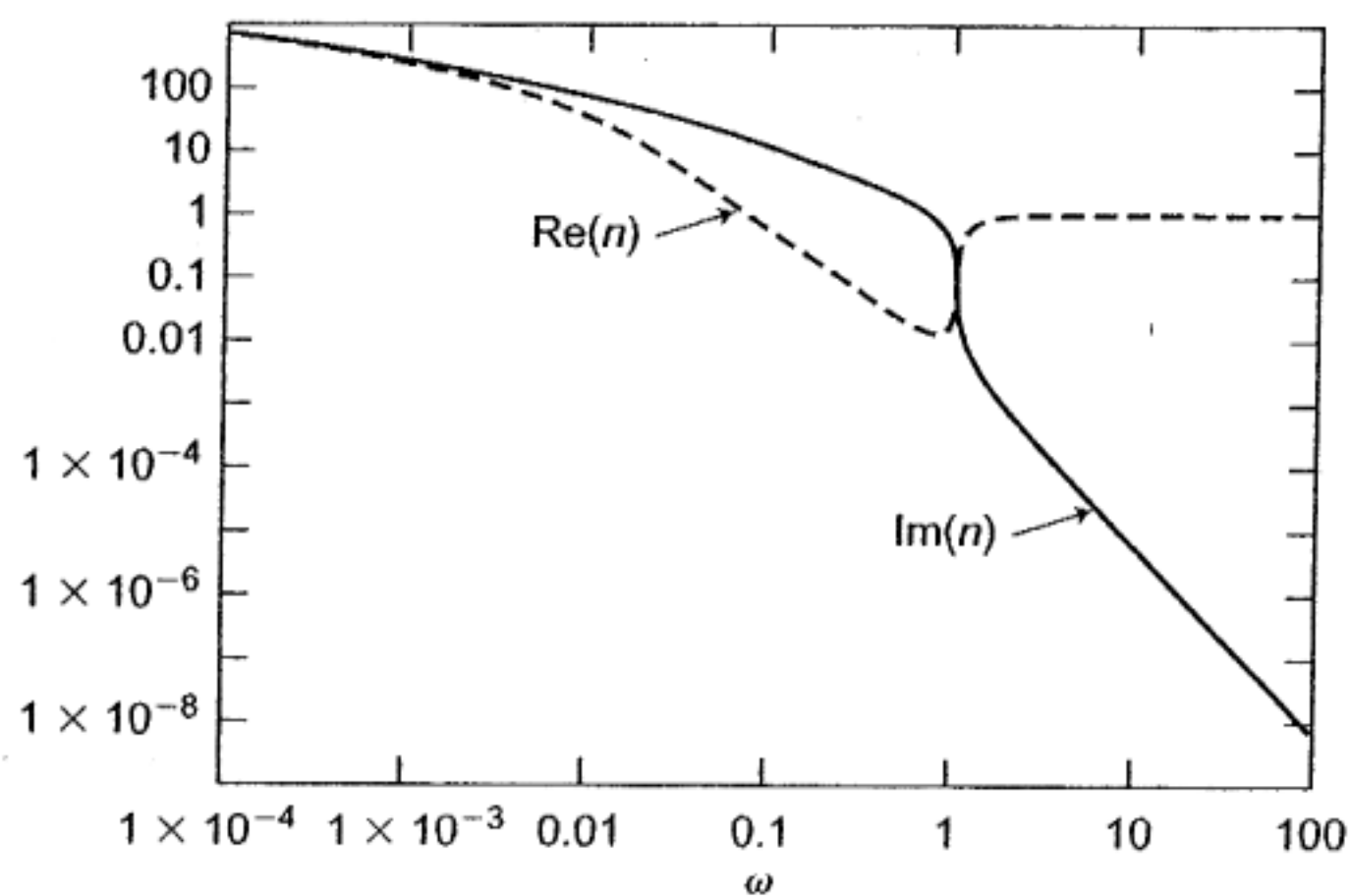
wobei $\sigma(\omega) = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega_p^2}{-\omega + i\gamma}$ die freq. abh. Leitfähigkeit im Drude Modell ist.

Grenzfälle

$$n(\omega) \rightarrow \begin{cases} \omega \rightarrow \infty : & 1 \\ \omega \rightarrow 0 : & \frac{1}{\sqrt{2}} (1+i) \sqrt{\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}} \end{cases}$$

$\omega < \omega_p$ $n(\omega)$ reell, imaginär

$\omega > \omega_p$ reell



Complex index of refraction.

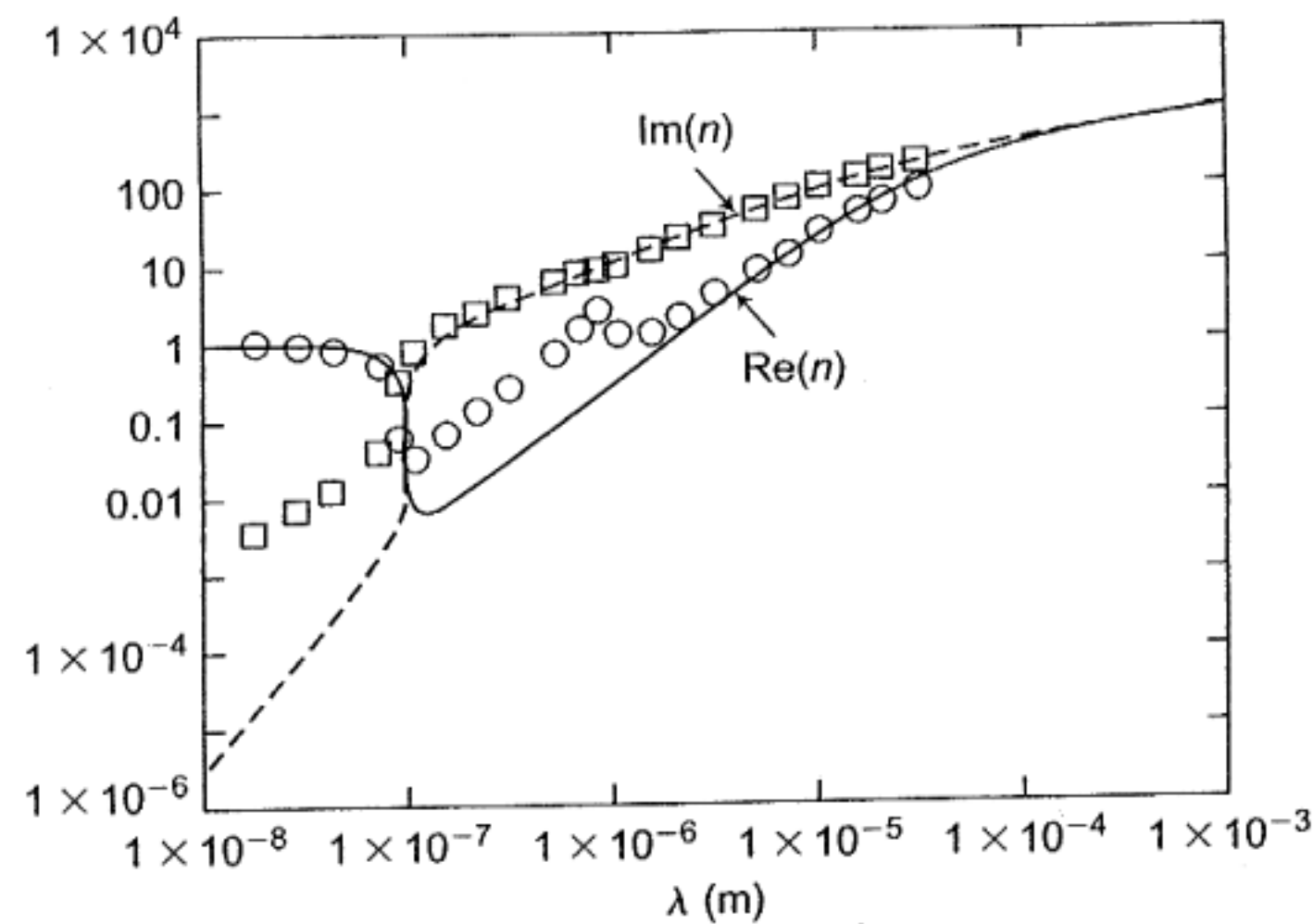


Figure 7.11 Complex index of refraction of aluminum.

The Drude model is plotted versus wavelength and compared with experimental data for aluminum in Figure 7.11. The solid curves correspond to the parameters $\omega_p = 1.98 \times 10^{16}$ radians/s and $\gamma = 9.8 \times 10^{13}$ /s. Since aluminum has an electron density $n_e = 1.8 \times 10^{29}/\text{m}^3$ and a dc conductivity $\sigma_0 = 3.65 \times 10^7/\Omega\text{-m}$ at room temperature, the straightforward application of (7.163) and (7.180) would predict the parameters $\omega_p = 2.4 \cdot 10^{16}$ radians/s and $\gamma = 1.4 \cdot 10^{13}$ /s, which are somewhat at variance with the parameters inferred from optical measurements. With the "best fit" values of ω_p and γ , the agreement between the observed and calculated values of the real and imaginary parts of the complex index of refraction is good in the infrared ($\lambda > 10^{-6}$ m). At shorter wavelengths, the Drude model has the correct qualitative behavior, showing a sharp crossover of the real and imaginary parts at the plasma frequency ($\lambda \approx 10^{-7}$ m), but there are quantitative discrepancies. The disagreement at wavelengths below about 1.7×10^{-6} m has its origin in the excitation of conduction electrons to higher bands and, at still shorter wavelengths, to the excitation of inner-shell electrons.

Ans C. A. Brau,
 "Modern Problems in Classical
 Electrodynamics",
 Oxford

Für eine ebene Welle ergibt sich dann die Dispersionsrelation

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right) \\
 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i \frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}} \right) \\
 &= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}{1 - \frac{i\omega}{\gamma}} \right)
 \end{aligned}$$

Im Niederfrequenzbereich

$\frac{\omega}{\sigma} \ll 1$, $\frac{\omega}{\gamma} \ll 1$
 (guter Leiter) (Niederfrequenz)
 gilt dann für die Dispersionsrelation

$$k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{2\pi\sigma\omega}{c^2}} (1+i)$$

Man liest daraus ab, daß

$$\delta = \sqrt{\frac{c^2}{2\pi\sigma\omega}}$$

die Längenskala ist, auf der die Amplitude der ebenen Welle zerfällt (in dem Leiter eindringt). Diese Länge heißt Skin depth

Zahlenbeispiele: Cu

60 Hz	$\delta \approx 1 \text{ cm}$	(Wechselstrom)
2.45 GHz	$\delta \approx 1 \mu\text{m}$	(Mikrowelle)

Fall $\frac{\omega}{\gamma} \ll 1$ (Niederfreq.) aber $\frac{\omega}{\sigma} \gg 1$
dann

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i 4\pi \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

$$k \approx \frac{\omega}{c} \left(1 + i 2\pi \frac{\sigma}{\omega} \right)$$

und die Eindringtiefe wird zu

$$\delta = \frac{c}{2\pi\sigma} \quad (\text{Elektrolyte, Halbleiter})$$

also unabhängig von der Frequenz,

In diesem Fall gibt für den Reflexionskoeff.

$$r(\omega) = \frac{1 - n(\omega)}{1 + n(\omega)} \approx \frac{1 - \left(1 + i \frac{2\pi\sigma}{\omega} \right)}{1 + \left(1 + i \frac{2\pi\sigma}{\omega} \right)} \approx \frac{-i \frac{2\pi\sigma}{\omega}}{2} + o\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

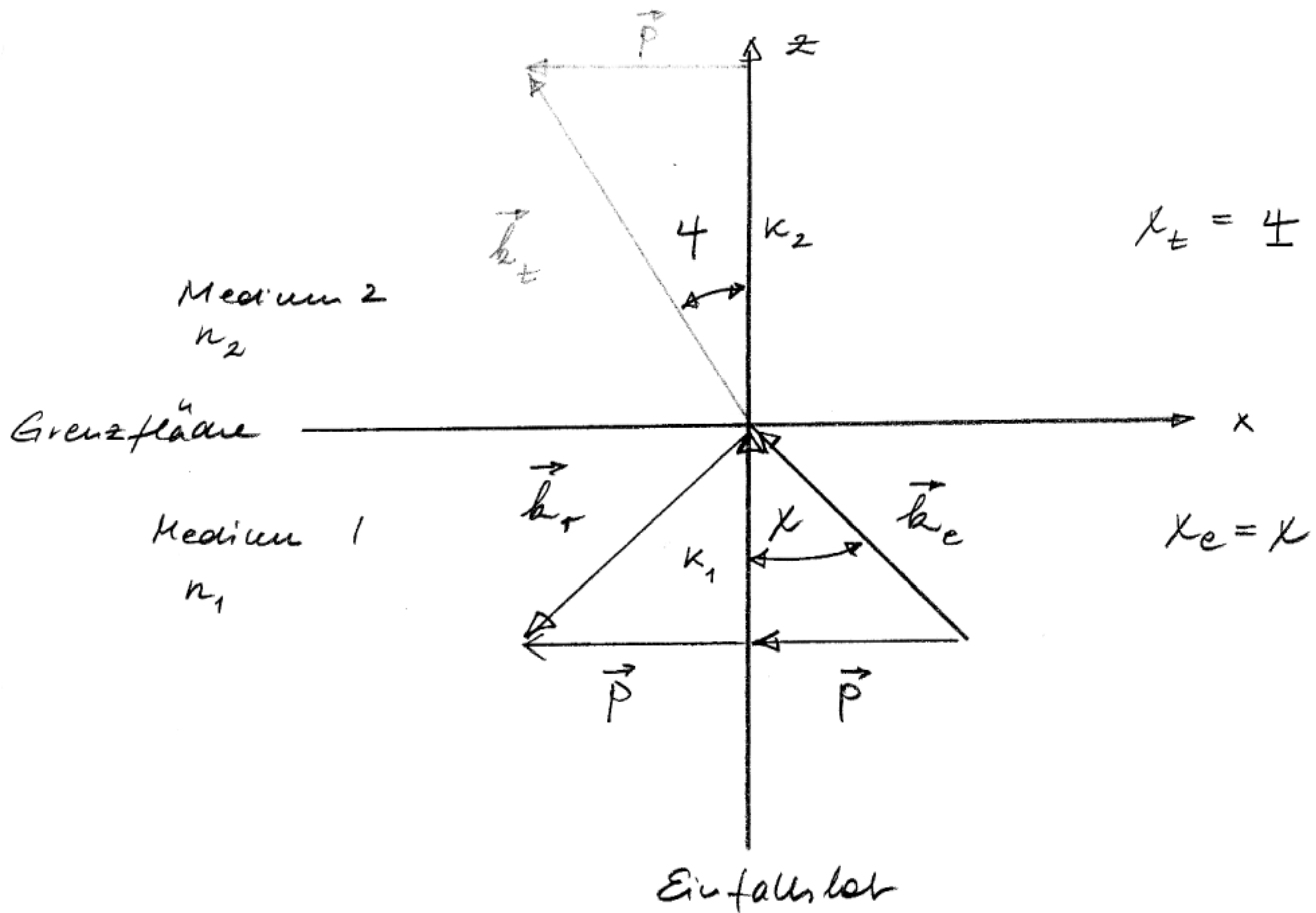
$$\text{i.e. } |r(\omega)| \ll 1$$

Vgl. hierzu den Fall eines guten Leiters

$$|r(\omega)| = \left| \frac{1 - \sqrt{i \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}}{1 + \sqrt{i \sqrt{\frac{4\pi\sigma}{\omega}}}} \right| \approx 1 - o\left(\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}}\right)$$

nahezu perfekte Reflexion.

5.4. Allgemeine Reflexion und Brechung



Der Wellenvektor $\vec{k}_e = (\vec{p}_e, k_e)$ der einfallenden homogenen Welle schneidet den Winkel χ_e mit dem Einfallslot $\vec{n} = (0, 0, 1)$ ein. Wir wählen die Einfallsebene (\vec{k}_e, \vec{n}) so, daß sie gleich der $(x-z)$ -Ebene ist, d.h. $\vec{p} = (p, 0, 0)$.

Neben der einfallenden und der durchgehenden Welle wird es im allgemeinen auch eine reflektierte Welle geben; diese die reflektierte Welle lassen sich i.a. die aus der Maxwell Theorie folgenden Stetigkeitsbedingungen beim Übergang von Medium 1 in Medium 2 nicht erfüllen.

Wie in Kapitel 5.1 diskutiert führen wir eine Fourierzerlegung der elem. Felder durch und betrachten die Fourierkomp.

$$\vec{E}^{\omega \vec{p}}(z) \quad \text{und} \quad \vec{B}^{\omega \vec{p}}(z), \dots$$

Die beiden Fourierindizes ω und \vec{p} lassen wir im folgenden immer weg.

In jedem der beiden Halbräume ① und ② setzen wir an

$$z < 0: \quad \vec{E}(z) = \underbrace{\vec{E}_e e^{i\kappa_1 z}}_{\text{einfallende Welle}} + \underbrace{\vec{E}_r e^{-i\kappa_1 z}}_{\text{reflektierte Welle}}$$

analog für weitere elem. Felder

$$z > 0: \quad \vec{E}(z) = \underbrace{\vec{E}_t e^{i\kappa_2 z}}_{\text{transmittede (durchgehende) Welle}}$$

Beachte, daß sich beim Übergang von Medium 1 auf Medium 2 keine kinematischen Restriktionen an die Frequenz ω und den Wellenvektor \vec{p} parallel zur Grenzschicht ergeben; dies liegt an der zeitlichen Translationsinvarianz und der Tz -Invarianz des Systems gegenüber Translationen parallel zur Grenzschicht.

Sei nun $n_{1,2}$ reell. Dann liegen alle homogenen Wellen in der Ebene, die durch (\vec{k}_e, \vec{n}) aufgespannt wird (= Einfallsebene).

Aus der Gleichheit der Frequenzen ω folgt

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_1(\vec{k}) = \frac{c}{n_1} |\vec{k}_1| = c_1 k_1 \\ &= \omega_2(\vec{k}) = \frac{c}{n_2} |\vec{k}_2| = c_2 k_2\end{aligned}$$

$$\sin \chi_e = \frac{p}{k_e} = \frac{p}{\omega} c_1$$

$$\sin \chi_t = \frac{p}{k_t} = \frac{p}{\omega} c_2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \chi}{c} = \frac{p}{\omega} = \text{konstant!}$$

$$\boxed{n_1 \sin \chi = n_2 \sin \varphi}$$

Snelliussches Gesetz

Die kinematischen Einstrahlkumpen an die
Welle ausbreitung lauten

$$\frac{pc}{\omega} = n \sin \chi = \text{konstant}$$

und folglich

$$\chi_e = -\chi_r, \quad n_1 \sin \chi_e = n_2 \sin \chi_t$$

Wähle folgende Notation

$$\chi = \chi_e = -\chi_r \quad \text{einfall. / refl. Welle}$$

$$\chi = \chi_t \quad \text{transm. Welle}$$

(Beachte auch, daß $k_r = -k_e$)

In folgenden verwenden wir nun die dynamischen
Einstrahlkumpen, die sich aus den Stetigkeits-
bedingungen für die elem. Felder ergeben:

(1) Normalkomponente von \vec{B}, \vec{D} stetig

(2) Tangentialkomponenten von \vec{H}, \vec{E} stetig

Wir unterscheiden die Fälle, daß \vec{E} in oder
senkrecht zur Einfallsebene liegt

a) $\vec{E} \perp$ Einfallsebene : $\vec{E} = (0, E, 0)$

$$\underline{\text{E tangential stetig}} \Rightarrow \boxed{E_e + E_r = E_t} \quad (\alpha)$$

H tangential stetig

$$\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{c}{\omega} (-k E, 0, k E) \quad (\text{Faraday})$$

$$\mu = 1 \Rightarrow \vec{B} = \vec{H} \quad (\text{Wähle } \mu = 1!)$$

$$\Rightarrow \boxed{-k_1 E_e + k_1 E_r = -k_2 E_t} \quad (\beta)$$

Durch Kombination von (α) und (β)
findet man

$$\boxed{\begin{aligned} E_t &= \frac{2k_1}{k_1+k_2} E_e \\ E_r &= \frac{k_1-k_2}{k_1+k_2} E_e \end{aligned}} \quad \begin{aligned} &\equiv t_{\perp} E_e \\ &\equiv r_{\perp} E_e \end{aligned} \quad \text{(Reflexions- und Transmissionskoeff.)}$$

Nur verwenden wir weiter das Durchflutungsgesetz
um die Dispersionrelation zu erhalten

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} &= p^2 + k_i^2 \\ \rightarrow k_i^2 &= \frac{n_i^2 \omega^2}{c^2} \left(1 - \left(\frac{pc}{n_i \omega} \right)^2 \right) = \left(\frac{\omega n_i}{c} \right)^2 (1 - \sin^2 \chi_i) \\ &= \left(\frac{\omega n_i}{c} \right)^2 \cos^2 \chi_i \quad ; \quad (i = 1, 2 \triangleq e, r) \end{aligned} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{\omega}{c} n_1 \cos \chi \\ k_2 &= \frac{\omega}{c} n_2 \cos \varphi \end{aligned} \right\} \text{ dies sind schlichter die Projektionen der Wellenvektoren in den Medien 1 und 2 auf das Einfallslot}$$

$$\rightarrow \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 \cos \chi - n_2 \cos \varphi}{n_1 \cos \chi + n_2 \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\sin \varphi \cos \chi - \sin \chi \cos \varphi}{\sin \varphi \cos \chi + \sin \chi \cos \varphi}$$

Snellius

$$= \frac{\sin(\varphi - \chi)}{\sin(\varphi + \chi)} = - \frac{\sin(\chi - \varphi)}{\sin(\chi + \varphi)}$$

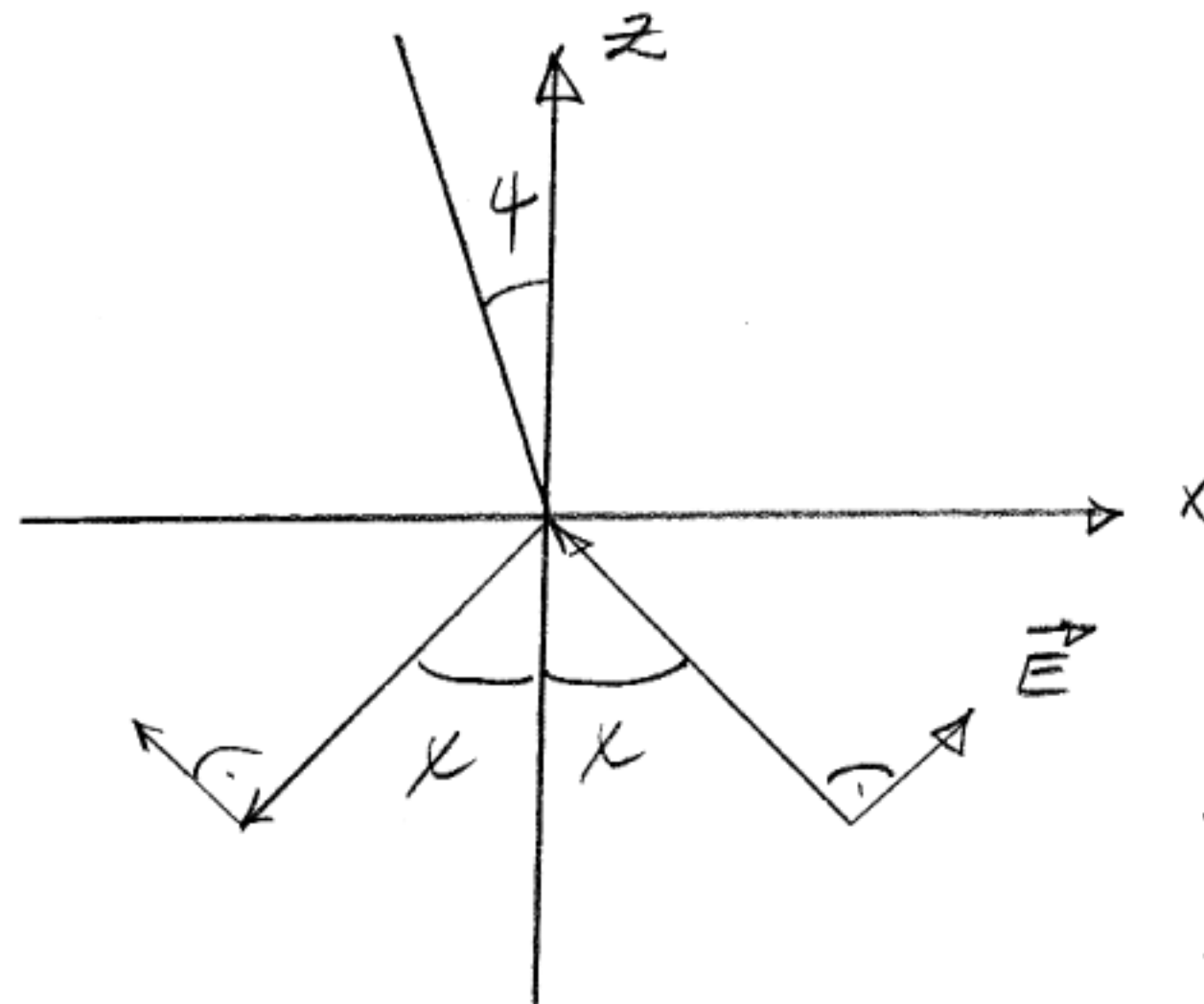
Add. Theoreme

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = - \frac{\sin(\chi - \varphi)}{\sin(\chi + \varphi)}} \quad (1F)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_t}{E_e} &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2n_1 \cos \chi}{n_1 \cos \chi + n_2 \cos \varphi} = \\ &= \frac{2 \frac{n_1}{n_2} \cos \chi}{\frac{n_1}{n_2} \cos \chi + \cos \varphi} = \frac{2 \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \cos \chi}{\frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \cos \chi + \cos \varphi} = \\ &= \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin \varphi \cos \chi + \sin \chi \cos \varphi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin(\chi + \varphi)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_e} = \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin(\chi + \varphi)}} \quad (2F)$$

b) $E \parallel$ Einfallsebene: $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$



$$E_x = E \cos \chi$$

$$E_z = E \sin \chi$$

E tangentialgleich:

$$\leadsto \boxed{(E_e - E_r) \cos \chi = E_t \cos \varphi} \quad (\alpha')$$

H tangentialgleich: $\vec{B} = \frac{c}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{kc}{\omega} (0, E, 0)$

$$\leadsto k_1 (E_e + E_r) = k_2 E_t \quad \text{mit} \quad \begin{cases} k_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \\ k_2 = \frac{\omega}{c} n_2 \end{cases}$$

$$\leadsto \boxed{n_1 (E_e + E_r) = n_2 E_t} \quad (\beta')$$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_e} = \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin(\chi + \varphi) \cos(\chi - \varphi)}} \quad (3F)$$

$$\boxed{\frac{E_r}{E_e} = \frac{\tan(\chi - \varphi)}{\tan(\chi + \varphi)}} \quad (4F)$$

Nebenrechnung

• $(\alpha') \cdot n_2 - (\beta') \cos \varphi :$

$$(E_e - E_r) n_2 \cos \chi - n_1 \cos \varphi (E_e + E_r) = 0$$

$$E_e [n_2 \cos \chi - n_1 \cos \varphi] = E_r [n_2 \cos \chi + n_1 \cos \varphi]$$

$$\rightarrow \frac{E_r}{E_e} = \frac{n_2 \cos \chi - n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \chi + n_1 \cos \varphi} = \frac{\cos \chi - \frac{n_1}{n_2} \cos \varphi}{\cos \chi + \frac{n_1}{n_2} \cos \varphi}$$

$$= \frac{\cos \chi - \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \cos \varphi}{\cos \chi + \frac{\sin \varphi}{\sin \chi} \cos \varphi} = \frac{\sin \chi \cos \chi - \sin \varphi \cos \varphi}{\sin \chi \cos \chi + \sin \varphi \cos \varphi} =$$

$$= \frac{\sin 2\chi - \sin 2\varphi}{\sin 2\chi + \sin 2\varphi}$$

$$= \frac{\cos(\chi + \varphi) \sin(\chi - \varphi)}{\sin(\chi + \varphi) \cos(\chi - \varphi)} = \frac{\tan(\chi - \varphi)}{\tan(\chi + \varphi)}$$

• $(\alpha') \cdot n_1 + (\beta') \cos \chi$

$$E_e (n_1 \cos \chi + n_1 \cos \chi) = E_t (n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \chi)$$

$$\rightarrow \frac{E_t}{E_e} = \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin \varphi \cos \varphi + \sin \chi \cos \chi} = \frac{2 \sin \varphi \cos \chi}{\sin(\chi + \varphi) \cos(\chi - \varphi)}$$

Fresnelsche Formeln

$\vec{E} \perp$ Einfallsebene

$$\frac{E_r}{E_e} = - \frac{\sin(\kappa - \varphi)}{\sin(\kappa + \varphi)}$$
$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2 \sin \varphi \cos \kappa}{\sin(\kappa + \varphi)}$$

$\vec{E} \parallel$ Einfallsebene

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{\tan(\kappa - \varphi)}{\tan(\kappa + \varphi)}$$
$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2 \sin \varphi \cos \kappa}{\sin(\kappa + \varphi) \cos(\kappa - \varphi)}$$

Diskussion

Wenn das Medium 2 „optisch dichter“ als das Medium 1 ist, d.h. $n_2 > n_1$, so existiert nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$\sin \varphi = \underbrace{\frac{n_1}{n_2}}_{< 1} \sin \chi$$

zu jedem Einfallswinkel χ ein reeller Brechungswinkel φ . Falls aber das Medium 1 das optisch dichtere ist, d.h. $n_1 > n_2$, so gibt es keine Lösungen mehr, wenn $\sin \chi < \frac{n_2}{n_1}$ ist. Der Fall $\sin \chi > \frac{n_2}{n_1}$ (Totalreflexion) diskutieren wir später noch im Detail. Hier schließen wir diesen Fall aus.

$$0 \leq \chi \leq \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$$

E_r/E_e und E_t/E_e sind reell

↗ Phasen der reflektierten und gebrochenen Welle unterscheiden sich von der einfallenden Welle gar nicht oder um π (Faktor -1).

Vorzeichenkonvention: Nach den obigen Skizzen bezeichnen man die Komponenten der gebrochenen Welle als gleichphasig mit der einfallenden Welle, wenn $E_t/E_e > 0$. Bei der reflektierten Welle müssen wir die Fälle $\vec{E} \perp$ und \parallel zur Einfallsebene unterscheiden. Fall $\vec{E} \perp (\vec{k}, \vec{n})$ sind einfallende und reflektierte Welle gleichphasig für $E_r/E_e > 0$; falls $\vec{E} \parallel (\vec{k}, \vec{n})$ sind einfallende und reflektierte Welle gleichphasig wenn $E_r/E_e < 0$.

Aus den Fresnel'schen Formeln lassen wir uns ableiten:

(i) $E_t/E_e > 0$, d.h. kein Phasensprung zwischen einfallender und durchgehender Welle.

(ii) Reflektierte Welle: $n_2 > n_1 \rightarrow \chi > \psi$
Dann $E_r/E_e < 0$

- Komponenten \perp Einfallsebene machen einen Phasensprung um π .

- Komponente \parallel Einfallsebene

◦ falls $\chi + \varphi < \frac{\pi}{2}$ (also $\tan(\chi + \varphi) > 0$)

$\rightarrow E_r/E_o > 0$, d.h. auch diese Komponente macht einen Phasensprung um π

◦ bei größeren Winkeln ($\chi + \varphi > \frac{\pi}{2}$) sind die Komponenten in Phase

(iii) Deflektierte Welle: $n_1 > n_2 \rightarrow \chi < \varphi$
dann stehen sich die Vorzeichen in der reflektierten Welle gerade gegenüber. Folglich macht die \perp Komponente keinen Phasensprung, und die \parallel Komponente ebenfalls nicht bis $\chi + \varphi = \frac{\pi}{2}$; oberhalb dieser Werte springt die \parallel Komponente dann um π .

(iv) Senkrechter Einfall $\chi = 0$

Dann werden die Fresnel Formeln unbrauchbar, Setze in früheren Ausdrücken $\cos \chi = \cos \varphi = 1$

$$\frac{E_r}{E_e} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_t}{E_e} = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

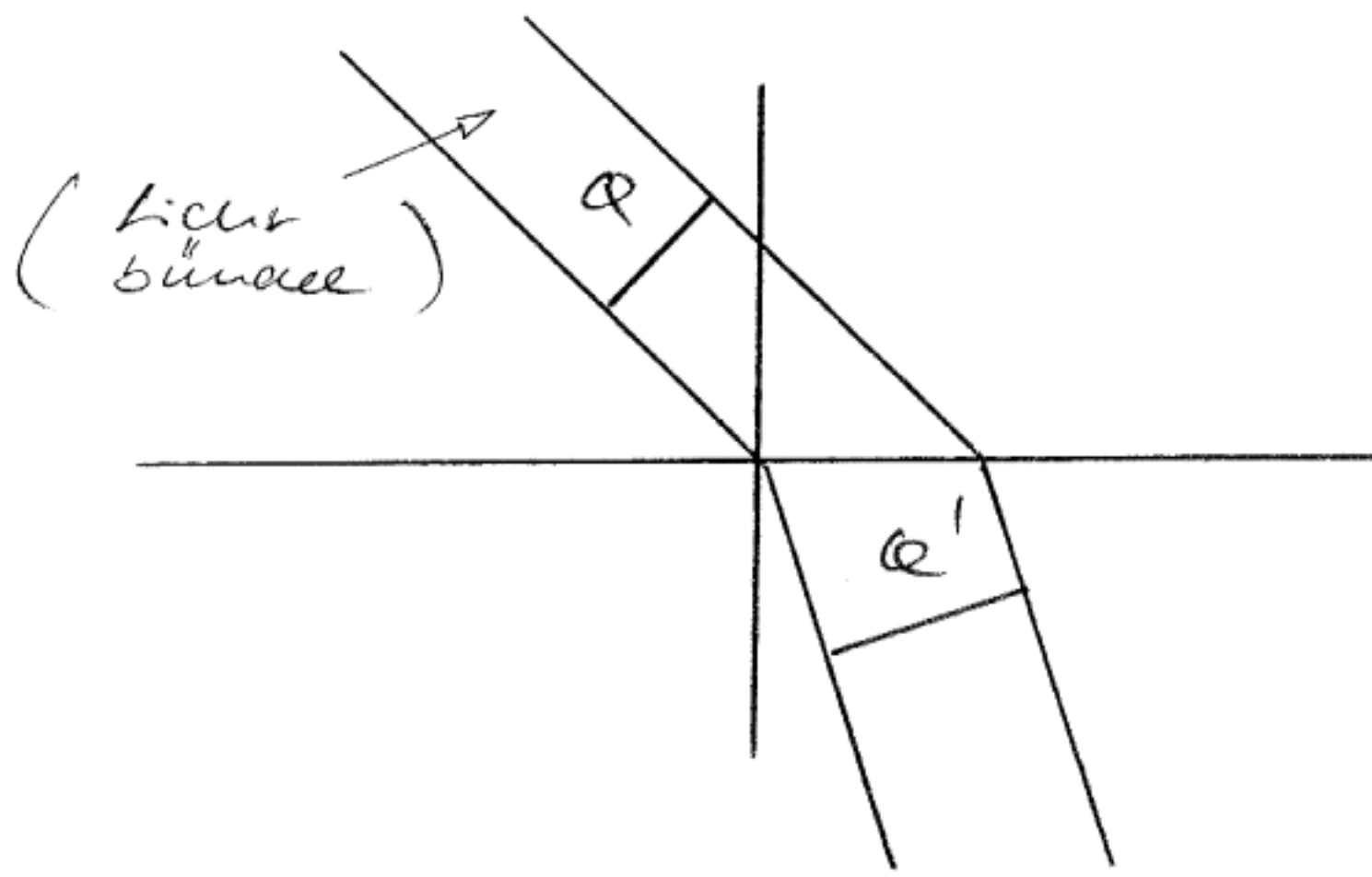
Der Unterschied zwischen der \perp und \parallel Komponente ist verschwunden, der Begriff der Einfallsebene bedeutungslos geworden.

Der Betrag des Poynting Vektors, d. h. die Lichtintensität, ist gegeben durch ($\mu = 1$)

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} |\vec{E} \times \vec{H}| = \frac{c}{4\pi} \underbrace{\sqrt{\epsilon}}_n E^2$$

siehe 3.6.

Um nun die Intensitäten des gespiegelten und gebrochenen Lichts mit Hilfe der Fresnelschen Formeln zu bestimmen, muß man bedenken, daß der Querschnitt A eines Lichtbündels bei der Brechung sich ändert.



$R =$ Reflexionsvermögen

$$= \frac{|S_r| \cos \alpha}{|S_e| \cos \alpha} = \begin{cases} \frac{\tan^2(\alpha - \alpha')}{\tan^2(\alpha + \alpha')} & ; \parallel \\ \frac{\sin^2(\alpha - \alpha')}{\sin^2(\alpha + \alpha')} & ; \perp \end{cases}$$

$T =$ Durchlässigkeit

$$= \frac{|S_t| \cos \alpha'}{|S_e| \cos \alpha} = \begin{cases} \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha + \alpha') \cos^2(\alpha - \alpha')} & ; \parallel \\ \frac{\sin 2\alpha \sin 2\alpha'}{\sin^2(\alpha + \alpha')} & ; \perp \end{cases}$$

Man verifiziert, daß

$$R + T = 1$$

ist, wie nach dem Energieerhaltungssatz
gesehen werden kann.

Bei senkrechtem Einfall haben wir

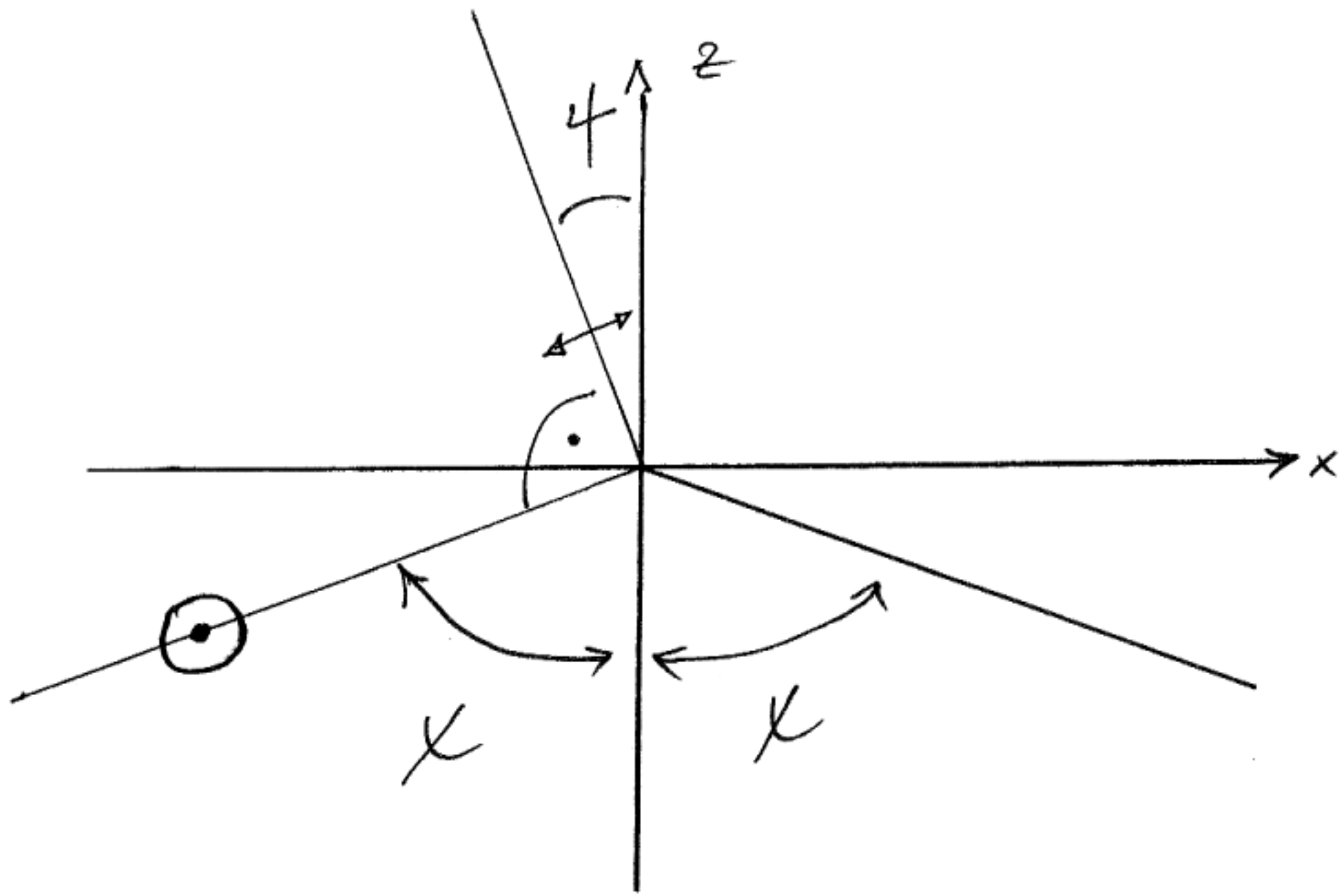
$$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2, \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_2 + n_1)^2}$$

$$\lim_{n_1 \rightarrow n_2} R = 0, \quad \lim_{n_1 \rightarrow n_2} T = 1$$

Je weniger der optische Unterschied zweier Medien
desto weniger Energie verliert ein durch ihre
Grenzfläche tretender Lichtstrahl durch Reflexion.

Für streifenden Einfall, $\chi = \frac{\pi}{2}$, wird $R = 1$.

Die Nenner der Ausdrücke für R und T
bleiben immer endlich nur eine Ausnahme:
Für $\chi + \varphi = \frac{\pi}{2}$ wird $\tan(\chi + \varphi) = \infty$
und damit $R_{\parallel} = 0$. Dann wird also die
Komponente des E -Feldes \parallel Einfallsebene
nicht reflektiert. $\varphi + \chi = \frac{\pi}{2}$ heißt, daß
reflektierter und gebrochener Strahl aufeinander
 \perp stehen \rightarrow Skizze



Aus dem Brechungsgesetz folgt mit

$$\sin \varphi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right) = \cos \chi$$

$$\rightarrow \tan \chi_B = n_2 / n_1$$

Der Winkel, der diese Beziehung erfüllt heißt
Polarisationswinkel oder Brewster Winkel χ_B .

Die reflektierte Welle ist dann \perp auf
Einfallsebene polarisiert

→ Erzeugung lin. polarisierter Lichts.

(Anschaulich: Da reflektierter Strahl \perp
auf gebrochenen Strahl und Abstrahlung
der schwingenden Dipole transversal zu seiner
Schwingungsrichtung erfolgt keine Energieabgabe
für in der Einfallsebene erfolgte Ausbreitung.)

tige isotrope Körper.
 l aufeinander senkrecht (s.
 $\sin \psi = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \cos \varphi$:
 3t *Polarisationswinkel* oder
 ON DAVID BREWSTER (1781

rt, so wird die parallel zur
 ischen Vektors ausgelöscht.
 „in der Einfallsebene“, wie
 erten Lichts bezeichnet man
 gels, durch den die lineare
 Definition ist also nicht der
 „Polarisation“ bestimmend;
 r zweifellos der physikalisch
 n am besten den Begriff der
 ichtung und ersetzt ihn
 r Schwingungsrichtung (des
 Vektors).

te nicht mehr zweifelhafte
 der Geschichte der Optik
 Gegenstand von Meinungs-
 iten gewesen. Zur Zeit der
 ichtorie war in der Tat
 ht in dem Sinne entscheide-
 e, wo wir uns auf die be-
 rungen des elektrischen und
 Feldes berufen können. So
 zu dem Ergebnis, daß die
 hvingungen des Äthers senk-
 Polarisationsebene erfolgen,
 NZ NEUMANN sie als parallel
 im. Sie machten nämlich
 der Ätherbewegung; bei
 denen Medien verschieden,
 mgekehrt. In Wahrheit ist
 Einleitung erläutert wurde,
 ngungen verletzen, um das
 zu vermeiden.

ück, so können wir uns den
 machen, indem wir uns vor-
 Welle im zweiten Medium
 , deren Richtung durch den
 st. Diese Elektronenschwin-
 die erste Medium zurück-
 ear schwingendes Elektron
 det keine Energieabgabe in
 d der reflektierte Strahl auf
 ür die Schwingung parallel
 Strahl erhält keine Energie

Die Fig. 10 stellt für Glas den Verlauf der Intensität des reflektierten Lichts als Funktion des Einfallswinkels φ dar¹. Dieser ist am unteren Rande der Figur einer Gradskala aufgetragen; am oberen Rande stehen die entsprechenden Werte des Brechungswinkels. Die Kurve I stellt r_s , die Kurve II $\frac{1}{2}(r_s + r_p)$, die Kurve III r_p dar; man bemerkt die Stelle der Kurve III, die dem Polarisationswinkel $56^\circ 40'$ entspricht, ein Winkel, dessen Tangens gerade $n = 1,52$ beträgt.

Die Kurve II zeigt die Intensität des reflektierten Lichts für den Fall, daß das einfallende Licht linear unter 45° gegen die p - oder s -Richtung polarisiert ist. Betrachten wir nämlich allgemein linear polarisiertes Licht von der Amplitude A , bei dem die Schwingungsrichtung von \mathcal{E}^a den Winkel α gegen die p -Richtung bildet, so ist

(10) $A_p = A \cos \alpha, \quad A_s = A \sin \alpha.$

Ist A die Lichtstärke des einfallenden Bündels, so hat man

(11) $A_p = A \cos^2 \alpha, \quad A_s = A \sin^2 \alpha.$

Die gesamte reflektierte Intensität läßt sich also schreiben:

$R_\alpha = R_p + R_s = \left(\frac{R_p}{A_p} \cos^2 \alpha + \frac{R_s}{A_s} \sin^2 \alpha \right) A,$

und hieraus folgt $R_\alpha = R_\perp \sin^2 \alpha + R_\parallel \cos^2 \alpha$

(12) $r_\alpha = \frac{R_\alpha}{A} = r_p \cos^2 \alpha + r_s \sin^2 \alpha;$

Entsprechendes gilt für das gebrochene Licht. Für $\alpha = \pi/4$ hat man wegen $\cos^2 \frac{\pi}{4} = \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ gerade die durch Kurve II dargestellte Funktion

(13) $r_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}(r_p + r_s).$

Dieselbe Kurve stellt auch das Verhalten von natürlichem Licht bei Reflexion dar. Man kann nämlich natürliches Licht auffassen als polarisiertes Licht mit unregelmäßig schwankendem Polarisationszustand. Man erhält also die Intensität durch Mittelung über den Winkel α . Da die Mittelwerte von $\cos^2 \alpha$ und $\sin^2 \alpha$ gleich $\frac{1}{2}$ sind, so wird für natürliches Licht

(14) $\bar{A}_p = \bar{A}_s = \frac{1}{2} A,$

aber:

(15) $\left\{ \begin{aligned} \bar{R}_p &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R}_p}{\bar{A}_p} A = \frac{1}{2} r_p A, \\ \bar{R}_s &= \frac{1}{2} \frac{\bar{R}_s}{\bar{A}_s} A = \frac{1}{2} r_s A. \end{aligned} \right.$

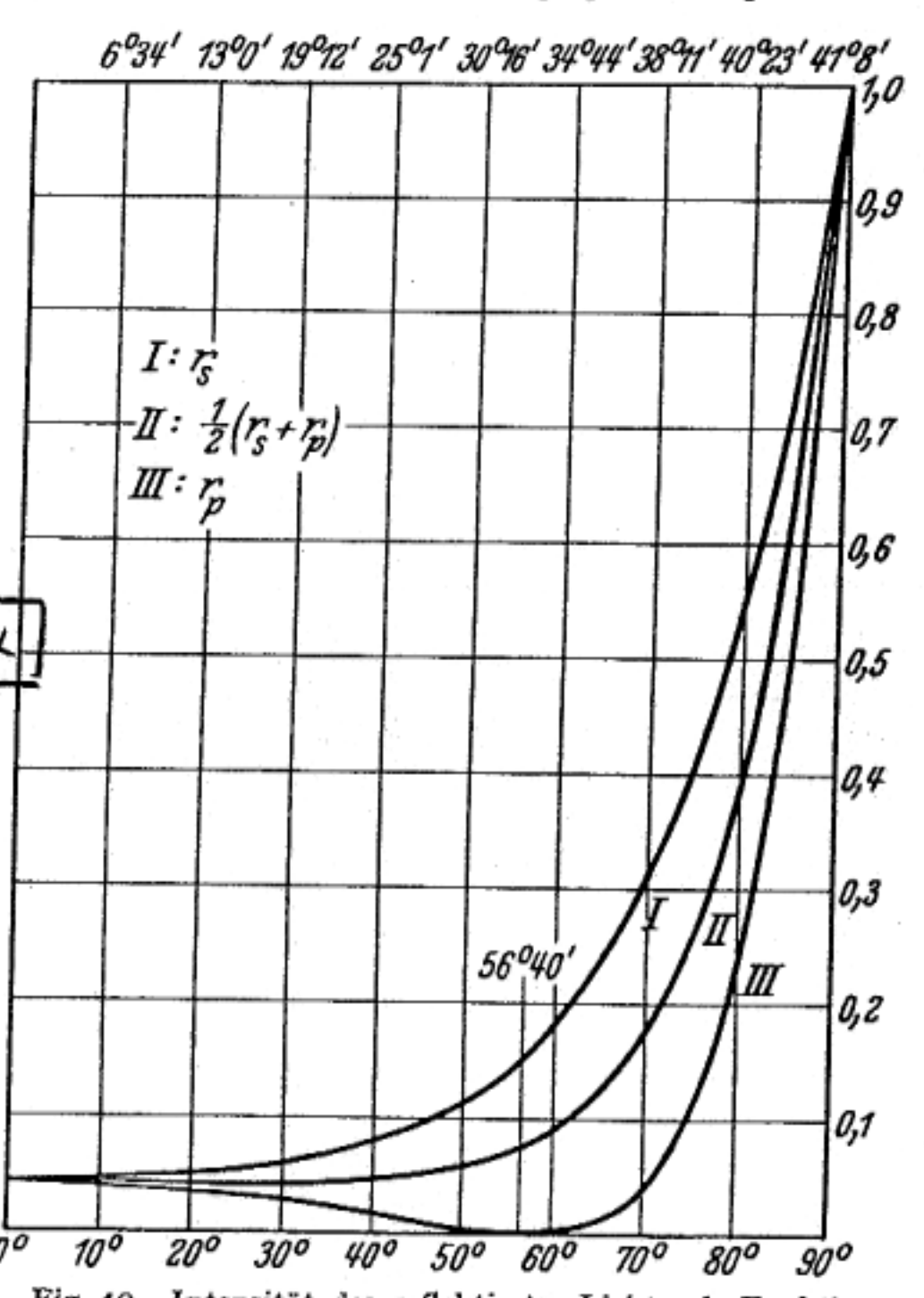


Fig. 10. Intensität des reflektierten Lichts als Funktion des Einfallswinkels. (Nach CHWOLSON: Lehrb. d. Physik, 2. Aufl. 1922.)

¹ Aus O. D. CHWOLSON: Lehrbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. II 2 S. 716. Braunschweig 1922.

Born, Optik.

$\left(\begin{array}{l} s = \perp \\ p = \parallel \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} r_s \rightarrow R_\perp \\ r_p \rightarrow R_\parallel \end{array} \right\}$

aus M. BORN, OPTIK, SPRINGER VERLAG

Die Ebene der Lichtschwingung wird also durch Reflexion an der Einfallsebene bzw. durch Brechung zu ihr hingedreht

Fig am BORN

$$n = 1,52$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Im reflektierten Licht sind also die beiden Komponenten nicht mehr gleich, man sagt dann, das reflektierte Licht sei *partiell* polarisiert, und nennt

$$(16) \quad \frac{\bar{R}_p - \bar{R}_s}{A} = \frac{1}{2}(r_p - r_s)$$

den *polarisierten Anteil*. Das Reflexionsvermögen des gesamten aus natürlichem durch Reflexion entstehenden Lichts ist gegeben durch

$$(17) \quad \bar{r} = \frac{\bar{R}}{A} = \frac{\bar{R}_p + \bar{R}_s}{A} = \frac{1}{2}(r_p + r_s),$$

also wieder durch die Kurve II.

Entsprechende Betrachtungen gelten für den gebrochenen Strahl. Insbesondere hat man bei natürlichem Licht

$$(18) \quad \bar{r} + \bar{d} = 1.$$

Wir kehren nun wieder zu linear polarisiertem Licht zurück. Ist das einfallende Licht linear polarisiert, so gilt dasselbe für das reflektierte und gebrochene, da die Phasen sich nur um 0 oder π ändern. Wohl

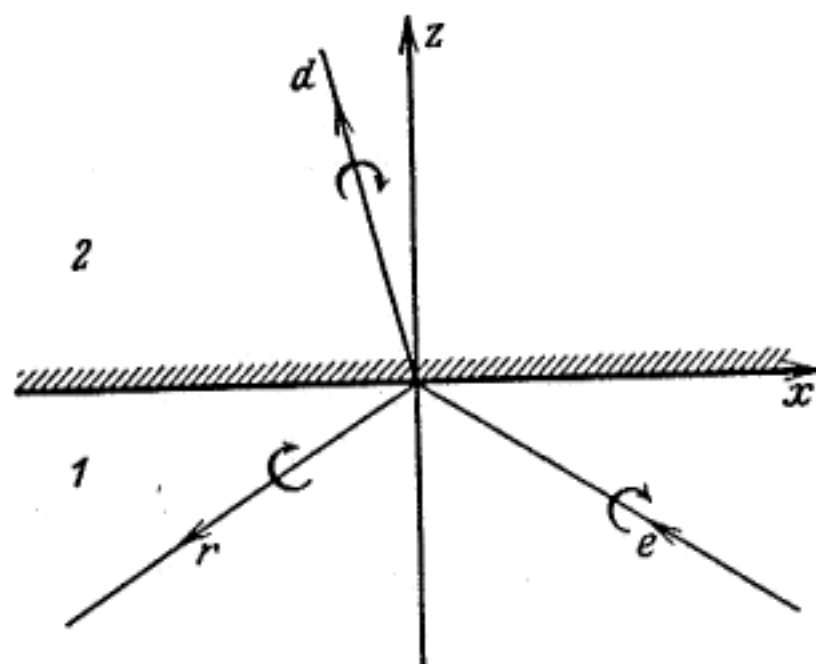


Fig. 11. Zur Vorzeichenbestimmung des Azimuts der Polarisation.

aber wird die Schwingungsrichtung (oder die „Polarisationsebene“) im reflektierten und gebrochenen Strahl gegen die im einfallenden gedreht sein. Man bezeichnet den Winkel zwischen Schwingungs- und Einfallsebene als das *Azimum* der Schwingung und zählt dieses positiv bei Rechtsdrehung um die Fortpflanzungsrichtung (Fig. 11).

Es sei α das Azimum der einfallenden, ϱ das der reflektierten, δ das der gebrochenen Welle man kann diese Winkel auf den Bereich $-\pi/2$ bis $\pi/2$ beschränken. Es ist

$$(19) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{A_s}{A_p}, \quad \operatorname{tg} \varrho = \frac{R_s}{R_p}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{D_s}{D_p}.$$

Aus den FRESNELSchen Formeln § 10 (14), (15) ergibt sich:

$$(20) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} \varrho = -\frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \\ \operatorname{tg} \delta = \cos(\varphi - \psi) \cdot \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

Wegen $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \psi \leq \pi/2$ folgt

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg} \varrho| &\geq |\operatorname{tg} \alpha|, \\ |\operatorname{tg} \delta| &\leq |\operatorname{tg} \alpha|, \end{aligned}$$

wo das Gleichheitszeichen in der oberen Ungleichung nur für senkrechte und streifende Inzidenz ($\varphi = \psi = 0$ bzw. $\varphi = \psi = \pi/2$) gilt, in der unteren Ungleichung nur für senkrechte Inzidenz. Die Ebene der Lichtschwingung wird also durch Reflexion von der Einfallsebene weg, durch Brechung zu ihr hingedreht. Den Verlauf¹ von ϱ und δ zeigt die Fig. 12 für $n = 1,52$ und $\alpha = 45^\circ$.

Man sieht, daß für den Polarisationswinkel $\varphi = 56^\circ 40'$ gerade $\varrho = 90^\circ$ wird; in der Tat wird für $\varphi + \psi = \pi/2$ nach (20) $\operatorname{tg} \varrho = \infty$, also $\varrho = \pi/2$ unabhängig von α .

¹ Nach O. D. CHWOLSON: Lehrbuch der Physik, 2. Aufl., Bd. II 2 S. 716.

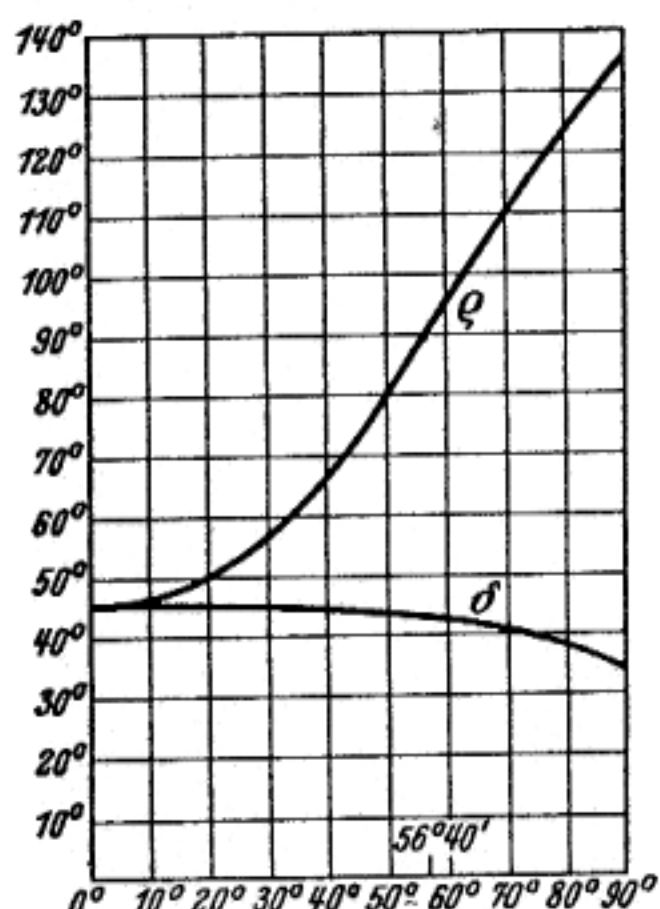


Fig. 12. Azimum der reflektierten und der gebrochenen Welle als Funktion des Einfallswinkels. (Nach CHWOLSON: Lehrb. d. Physik, 2. Aufl. 1922.)

Totalreflexion

Fall $\frac{n_2}{n_1} < 1$, man also von optisch dichteren in das optisch dünnere Medium übergeht, tritt ab einem Grenzwinkel

$$\sin \chi_G = \frac{n_2}{n_1} \quad (*)$$

Totalreflexion auf. Dann gilt $\varphi = 90^\circ$, das Licht tritt also „streifend“ aus. Für $\chi > \chi_G$ tritt überhaupt kein Licht mehr aus, sondern es wird umgedreht in das erste Medium zurückgeworfen. Trotzdem verdrillt kein Weg das elem. Feld in zweites Medium; wir strahlt keine Energie in diese über.

Wiederhole die Rechnung für $\chi > \chi_G$

Es gilt die Dispersionsrelation

$$n^2 \frac{\omega^2}{c^2} = p^2 + k^2$$

$$\rightarrow k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2} - p^2 = \left(\frac{n\omega}{c}\right)^2 (1 - \sin^2 \chi)$$

↑ Winkel im
inneren Medium

Folglich

$$k_2^2 = \left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{n_2 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi$$

$$(*) = \left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi_G - \left(\frac{n_1 \omega}{c}\right)^2 \sin^2 \chi$$

$$= -n_1^2 \underbrace{(\sin \chi - \sin \chi_G)}_{> 0} \underbrace{(\sin \chi + \sin \chi_G)}_{> 0} < 0$$

$$\Rightarrow k_2 = (\pm) i k_0 \quad k_0 = \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2 \chi - \sin^2 \chi_G}$$

keine physikalische Ausbreitung
fall Medium 2 ∞ ausgedehnt!
Rein imaginäre Wellenzahl

Hieraus ergibt sich dann der Reflexionskoeff.

$$\tau_{\perp} = \frac{\kappa_1 - \kappa_2}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{1 - \kappa_2/\kappa_1}{1 + \kappa_2/\kappa_1}$$

$$= \frac{\frac{\omega}{c} n_1 \cos \chi - i \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2 \chi - \sin^2 \chi_G}}{\frac{\omega}{c} n_1 \cos \chi + i \frac{\omega}{c} n_1 \sqrt{\sin^2 \chi - \sin^2 \chi_G}}$$

$$\kappa_1 = \frac{\omega}{c} n_1 \cos \chi$$

$$= \frac{\cos \chi - i \sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \chi + i \sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{\frac{n_2}{n_1} \kappa_1 - \frac{n_1}{n_2} \kappa_2}{\frac{n_2}{n_1} \kappa_1 + \frac{n_1}{n_2} \kappa_2} =$$

$$= \frac{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \chi - i \sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \chi + i \sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}$$

$$\downarrow |\tau_{\parallel}| = |\tau_{\perp}| = 1$$

Die reflektierte Welle hat somit ein E -Feld der Stärke und Phase

$$E_r = \tau E_e$$

so dass man zusammen mit dem Phasenfaktor für die reflektierte Welle den Ausdruck

$$\tau E_e \exp[i \vec{k} \cdot \vec{x} - i \omega t]$$

$$= \tau E_e \exp[ipx - i \omega t] e^{-k_0 z}$$

erhält, also eine exponentielle z -Richtung

abfallende Wellen. Die Größenordnung der Eindringtiefe in das optisch dünnere Medium ist durch $\frac{c}{\omega n_1}$ gegeben. Wegen der örtlich veränderlichen Amplitude nennt man solche Wellen „inhomogene Wellen“. Sie sind nicht transversal zur Ausbreitungsrichtung \vec{p} , da die x -Komponente des elektrischen Feldes nicht verschwindet (wenn $\vec{E}_e \parallel$ Einfallsebene).

Weiter ist zu beachten, dass r und t komplexe Größen sind und folglich Phasensprünge aufweisen. Wir berechnen diese für die einfallende und reflektierte Welle.

$$e^{-i\delta} = r = \frac{z}{z^*} = \frac{e^{-i\alpha}}{e^{+i\alpha}} \quad ; \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \delta = 2\alpha$$

$$\tan \frac{\delta}{2} = \tan \alpha = \begin{cases} \frac{\sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos \chi} & \parallel \\ \frac{\sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\cos \chi} & \perp \end{cases}$$

Die beiden Komponenten erfahren also unterschiedliche Phasensprünge. Daher wird linear polarisiertes Licht durch Totalreflexion in polarisiertes Licht verwandelt.

$$\delta = \delta_{\parallel} - \delta_{\perp}$$

$$\tan \frac{\delta}{2} = \frac{\cos \chi \sqrt{\sin^2 \chi - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}}{\sin^2 \chi}$$

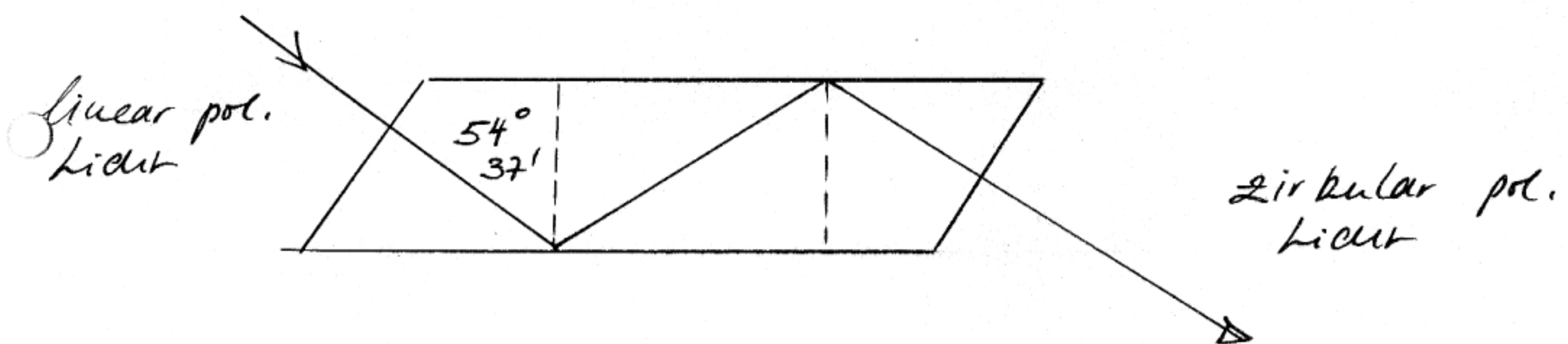
Dieser Ausdruck verschwindet für streifenden Einfall ($\chi = \pi/2$) und für den Grenzwinkel der Totalreflexion χ_0 , $\sin \chi_0 = \frac{n_2}{n_1}$. Zwischen diesen Winkeln liegt ein Maximum der relativen Phasendifferenz bei

$$\sin^2 \varphi_{\max} = \frac{2(n_2/n_1)^2}{1 + (n_2/n_1)^2}$$

Hierzu gehört $\tan(\delta_{\max}/2) = \frac{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$ (*)

Es kann sich also umso größere Phasendifferenzen erreichen, je kleiner $\frac{n_2}{n_1}$ ist.

Umwandlung von linear pol. Licht in zirkular pol. Licht \rightarrow Fresnel Parallelepiped.



Wähle das Azimut des einfallenden Strahls zu $\alpha = 45^\circ$. Dann gilt $|E_e^{\parallel}| = |E_e^{\perp}|$ und folglich wegen $|r_{\parallel}| = |r_{\perp}| = 1$ auch $|E_r^{\parallel}| = |E_r^{\perp}|$.

Dann wähle man $\frac{n_2}{n_1}$ und den Einfallswinkel χ so, daß die Phasendifferenz δ gleich 90° wird.

Um die nur einer einzelnen Reflexion zu erreichen, müsste man (*)

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1 < \frac{1-n^2}{2n} \quad (n \equiv n_2/n_1)$$

also $n_2/n_1 < \sqrt{2} - 1 = 0,414$ sein.

n_1/n_2 müsste also 2,41 betragen, ein Wert, der alleine von Diamant erreicht wird.

Daher benutzt Fresnel zwei Totalreflex.
an Glas; für $n_1/n_2 = 1,51$ wird der Einfallswinkel der maximalen Phasendifferenz $\delta_m = 45^\circ 56'$

Bei $\chi = 51^\circ 20'$ erreicht, kann kaum also gerade noch $\delta_m = 45^\circ$ erreichen und zwar für die Winkel

$$\chi = 48^\circ 37' \quad \text{und} \quad \chi = 54^\circ 37'$$

Durch zweimalige Totalreflexion unter einem dieser Winkel erhöht man dann eine Phasendifferenz von 90° .

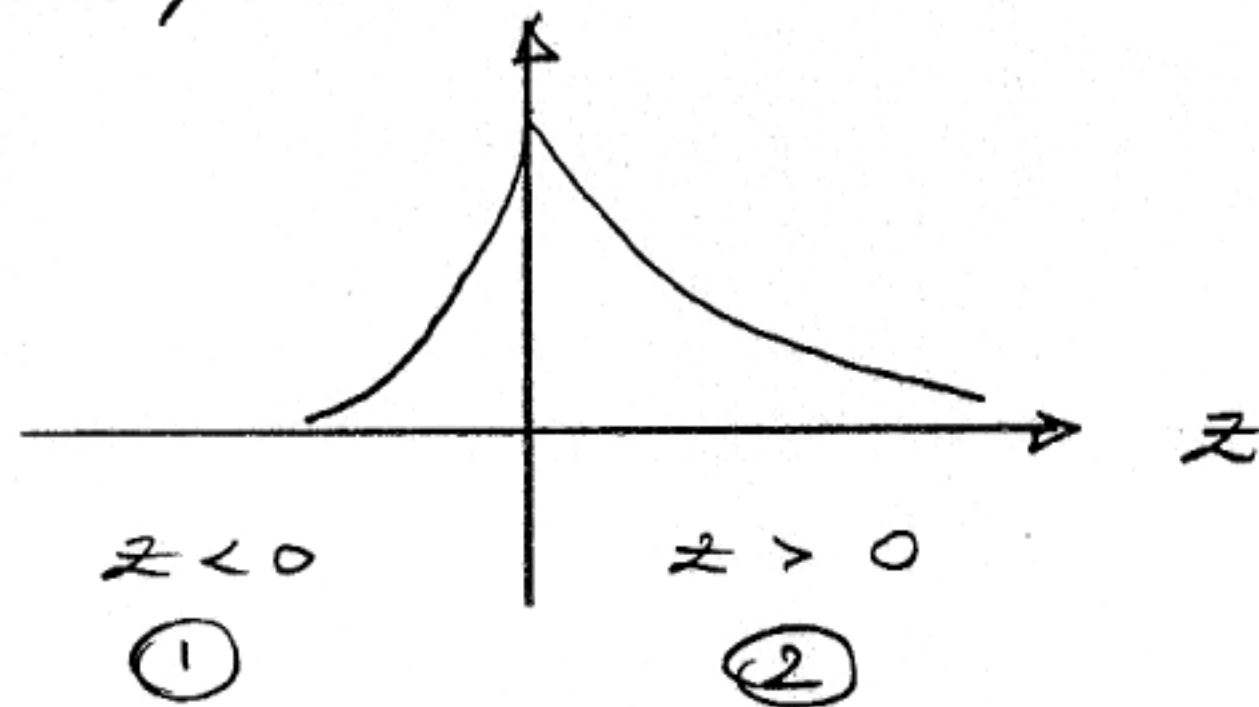
Man kann natürlich damit auch elliptisch polarisiertes Licht herstellen oder den Vorgang umkehren und aus elliptisch pol. Licht linear pol. Licht erzeugen.

5.5. Oberflächenwellen (Evaneszente Wellen)

Wir suchen nach Lösungen der Maxwelltheorie, die auf beiden Seiten der Grenzfläche exponentiell abklingen, also von der Form sind

$$F_x \propto \vec{p} \cdot e^{i(\vec{p} \cdot \vec{x} - \omega t)} e^{\pm \kappa_{1,2} \cdot z} \quad \left(\begin{array}{l} + \text{ für } z < 0 \\ - \text{ für } z > 0 \end{array} \right)$$

mit $\text{Re } \kappa_{1,2} > 0$, so daß die Wellen für $z \rightarrow \pm \infty$ abfallen.



Wir legen OBDA \vec{p} wieder in x-Richtung ($\vec{p} = (p, 0, 0)$), und betrachten Medium 1 und 2 gemeinsam, indem wir definieren

$$\vec{k} = (\vec{p}, -i\kappa)$$

$$\kappa = \kappa_1 \quad \text{für } z < 0 \quad (\text{Gebiet 1})$$

$$\kappa = -\kappa_2 \quad \text{für } z > 0 \quad (\text{Gebiet 2})$$

Damit gilt

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} = \begin{cases} e^{ipx + \kappa_1 z} & ; z < 0 \\ e^{ipx - \kappa_2 z} & ; z > 0 \end{cases}$$

für den Phasenfaktor.

Als nächstes verwenden wir nun die Maxwellgleichungen (+ Randbedingungen) um die Dispersionsrelation zu finden. Wir beschränken uns

auf den Fall $\mu = 1$, aber zunächst allgemein
 DK's $\epsilon_{1,2}(\omega)$.

(i) Aus $\text{div } \vec{B} = 0$ folgt $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$,
 also $p B_x - i k B_z = 0$

$$B_z = \frac{p}{ik} B_x$$

(ii) Aus der Randbedingung daß sowohl die
 Normal- wie die Tangentialkomponente des
 B -Feldes stetig mit $\mu = 1$ folgt

$$B_x^{(1)} = B_x^{(2)} \equiv b$$

$$B_z^{(1)} = \frac{p}{ik_1} b = B_z^{(2)} = -\frac{p}{ik_2} b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(k_1 + k_2)}_{\neq 0} \cdot b = 0 \quad \wedge \quad b = 0$$

$$B_y^{(1)} = B_y^{(2)}$$

$$\rightarrow \boxed{\vec{B}^{(1)} = \vec{B}^{(2)} = (0, B, 0)} \quad (1)$$

ist unverändert beim Durchgang durch
 die Grenzfläche, liegt in der Grenzfläche
 und ist transversal zur Ausbreitungs-
 richtung der Oberflächenwelle, \vec{p} .

(iii) Aus dem Durchflutungsgesetz folgt ($\vec{J}_{\text{frei}} = 0$)

$$-i \frac{\omega}{c} \vec{D} = i \vec{k} \times \vec{B}$$

Mit $\vec{D} = \epsilon(\omega) \vec{E}$ und

$$\vec{k} \times \vec{B} = B \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p & 0 & -ik \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = B (ik, 0, p)$$

folgt dann

$$\boxed{\epsilon(\omega) \vec{E} = -\frac{cB}{\omega} (ik, 0, p)}$$

oder für Medium 1 und 2 getrennt

$$\boxed{\epsilon_{1,2}(\omega) \vec{E} = -\frac{cB}{\omega} (\pm ik_{1,2}, 0, \rho)} \quad (2)$$

Daraus lesen wir ab, daß das elektrische Feld nicht mehr transversal ist, da es sowohl eine Komponente $\perp \vec{p}$ als auch eine Komponente $\parallel \vec{p}$ besitzt. Die transversale und longitudinale Komponente der evaneszenten elektrischen Felder sind gegeneinander um $\frac{\pi}{2}$ phasenverschoben (Faktor i).

(iv) $\text{div } \vec{D} = 0$ führt auf $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$. Da $(\rho, 0, -ik) \cdot (ik, 0, \rho) = 0$ ist diese Bedingung bereits erfüllt.

(v) Faraday Induktionsgesetz: $\frac{i\omega}{c} \vec{B} = i \vec{k} \times \vec{E}$

$$\vec{k} \times \vec{E} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \rho & 0 & -ik \\ ik & 0 & \rho \end{vmatrix} \frac{cB}{\epsilon\omega} =$$

$$= -\frac{cB}{\epsilon\omega} (0, -\rho^2 + k^2, 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\omega}{c} \cdot B = \frac{cB}{\epsilon \cdot \omega} (\rho^2 - k^2)$$

$$\Lambda \quad \boxed{\epsilon(\omega) = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\rho^2 - k^2)} \quad (I)$$

jeweils getrennt für Medium 1 und 2

$$\boxed{\epsilon_{1,2}(\omega) = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\rho^2 - k_{1,2}^2)} \quad (\epsilon_{1,2})$$

(vi) Schließbild verwenden wir noch die Stetigkeitsforderungen an \vec{D} und \vec{E}

$$D_{\text{normale}} \text{ stetig} \Rightarrow D_z^{(1)} = D_z^{(2)}$$

ist bereits erfüllt wegen der Stetigkeit der Magnetfelder; vergleiche Gleichung (2)

$$E_{\text{tangential}} \text{ stetig} \Rightarrow E_x^{(1)} = E_x^{(2)}$$

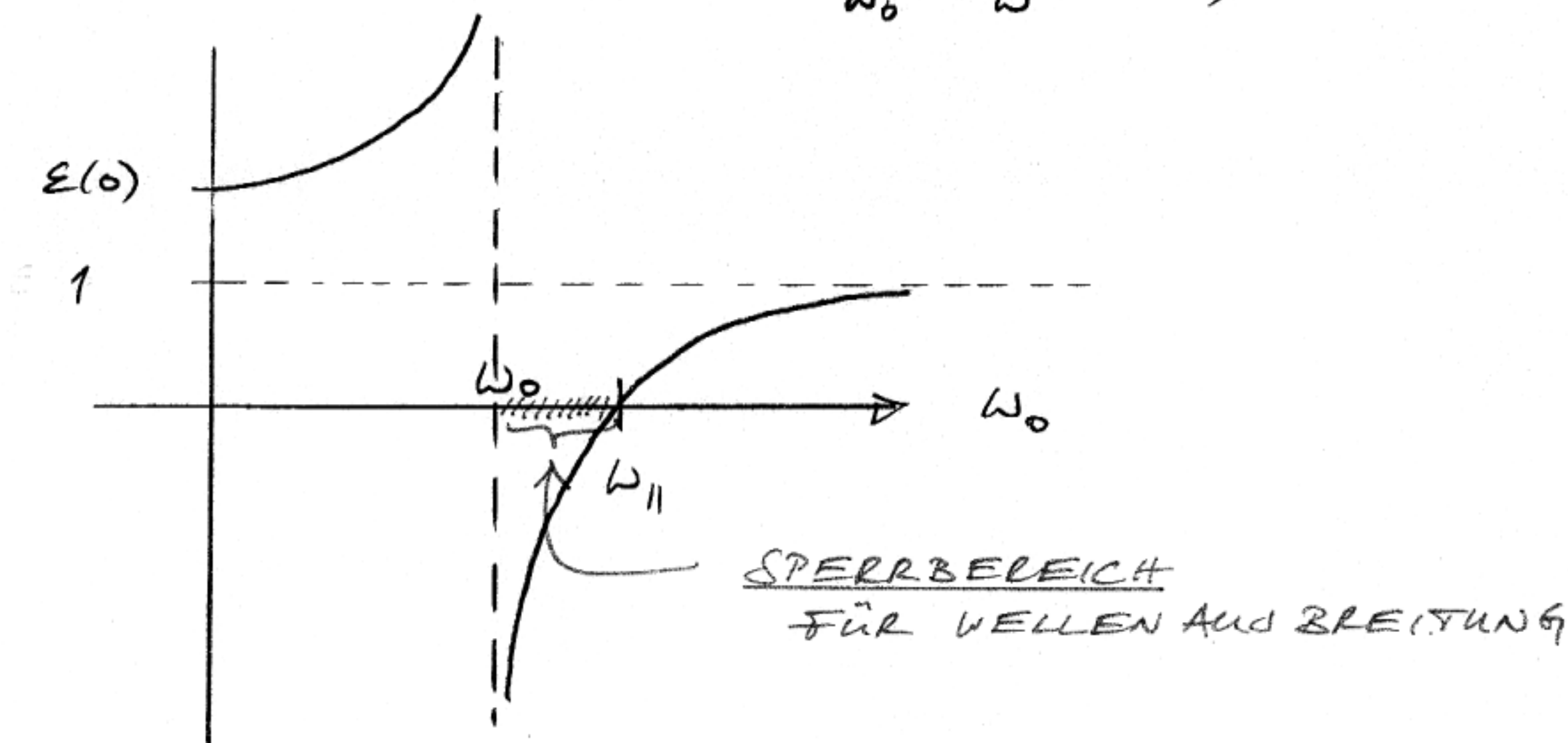
$$\text{(2)} \quad \left| \frac{\epsilon_1}{\kappa_1} = - \frac{\epsilon_2}{\kappa_2} \right| \quad (\text{II})$$

Die folgende Diskussion spezialisieren wir nun auf einfache Dielektrika (ohne Dämpfung) an der Grenzfläche zum Vakuum.

Dann

$$\epsilon_1 = 1, \quad \kappa_1 = \kappa > 0$$

$$\epsilon_2(\omega) = \epsilon(\omega) = \frac{\omega_{\parallel}^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \text{mit } \omega_{\parallel}^2 = \omega_p^2 + \omega_0^2$$



Im Bereich zwischen ω_0 und ω_{\parallel} ist $\epsilon < 0$ und damit der Brechungsindex n im Medium 2 rein imaginär, so daß dort keine Wellenausbreitung möglich ist (\rightarrow Sperrbereich)

Wir studieren nun die Existenz und Art der Oberflächenwellen für einfache Dielektrika. Aus (II) folgt

$$\boxed{\kappa_2 = -\epsilon(\omega) \kappa}$$

Demnach ist $\kappa_2 > 0$ falls $\epsilon(\omega) < 0$, d.h. Oberflächenwellen sind genau dann eine mögliche Lösung der Maxwelltheorie, wenn Wellenausbreitung im Dielektrikum nicht möglich ist, also für

$$\boxed{\omega_0 < \omega < \omega_{11}}$$

Die Gleichungen (I_{1,2}) lauten

$$(I_1) \quad 1 = \left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2$$

$$(I_2) \quad \epsilon = \left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 - \epsilon^2 \left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2$$

oder aufgelöst nach p und κ

$$\boxed{\begin{aligned} \left(\frac{pc}{\omega}\right)^2 &= \frac{\epsilon}{\epsilon+1} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{11}^2 - \omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2} & (\alpha) \\ \left(\frac{\kappa c}{\omega}\right)^2 &= -\frac{1}{\epsilon+1} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_{11}^2 - \omega_0^2} & (\beta) \end{aligned}}$$

$$\text{wobei } \omega_c = \frac{1}{2} (\omega_0^2 + \omega_{11}^2) = \omega_0^2 + \frac{1}{2} \omega_p^2$$

Oberflächenwellen sind folglich nur dann lösbar, wenn

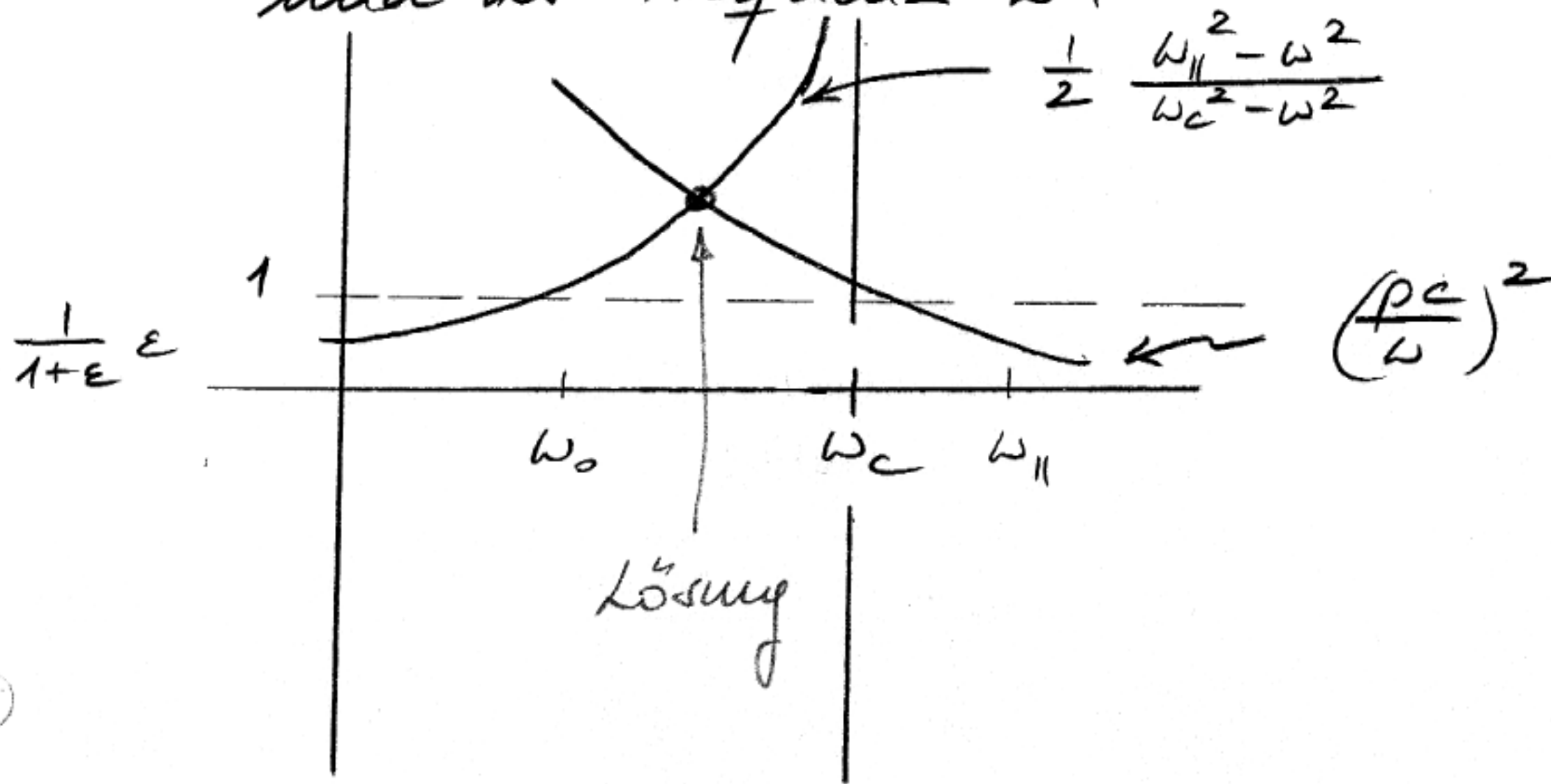
$$\boxed{\omega_0 < \omega < \omega_c}$$

Es gilt $p \rightarrow \infty$ für $\omega \rightarrow \omega_c$

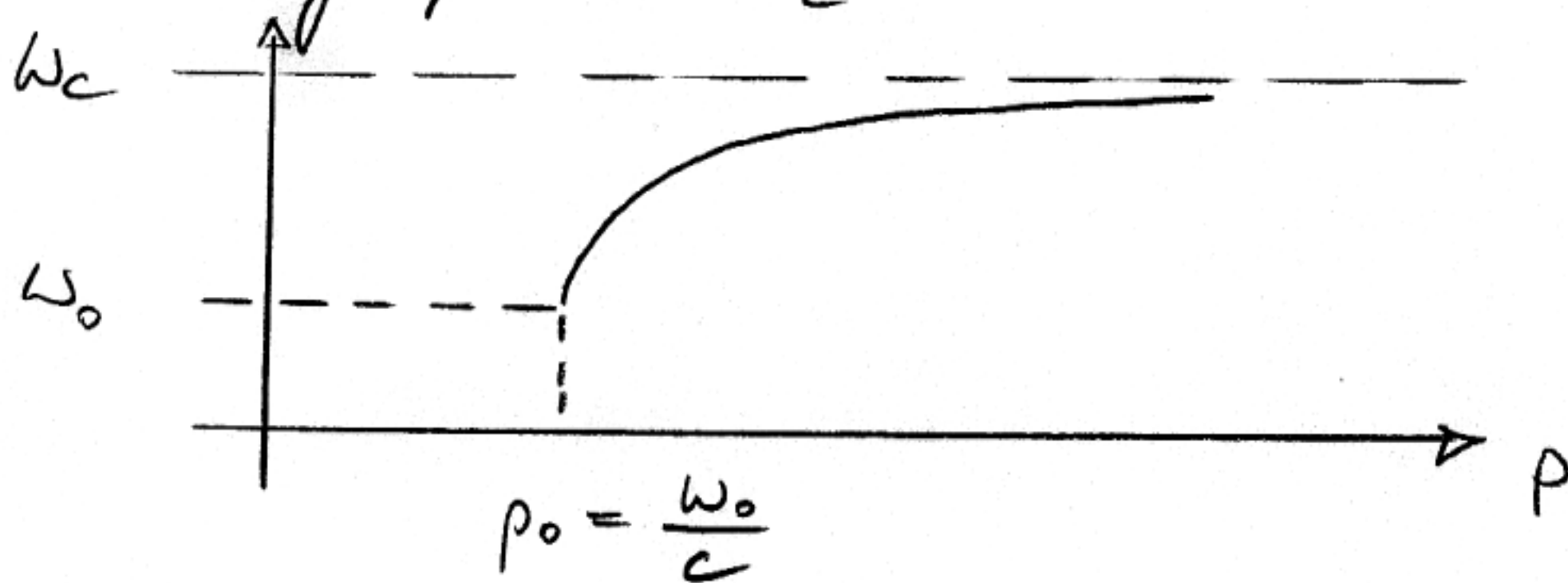
$p \rightarrow p_0$ für $\omega \rightarrow \omega_0$

$$\left(\frac{p_0 c}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\omega_p^2}{\frac{1}{2} \omega_p^2} = 1, \text{ d.h. } \boxed{p_0 = \frac{\omega_0}{c}}$$

Graphische Lösung von (A) ergibt die Dispersionsrelation $p = p(\omega)$ zwischen der Wellenzahl p in Ausbreitungsrichtung und der Frequenz ω .



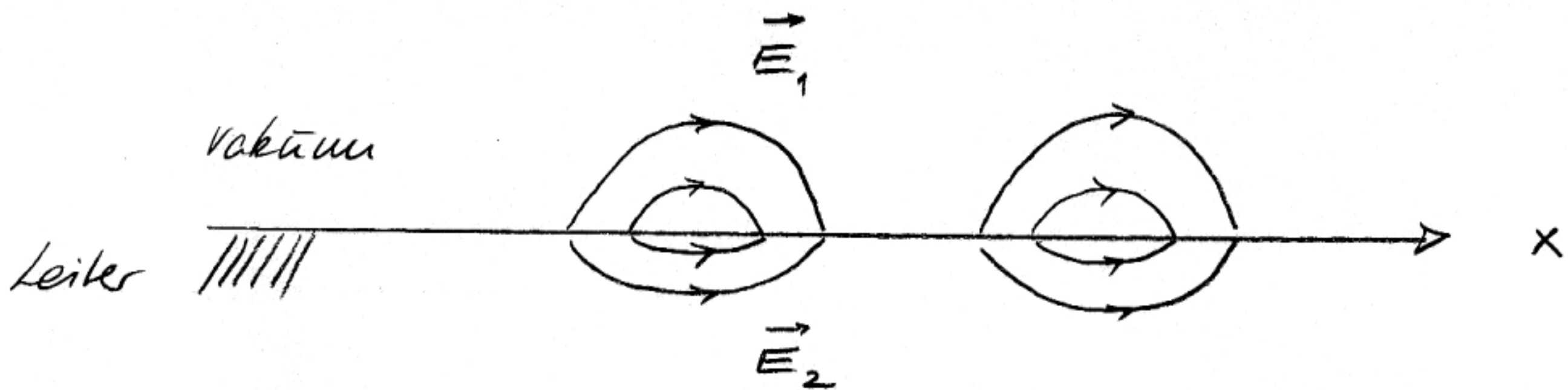
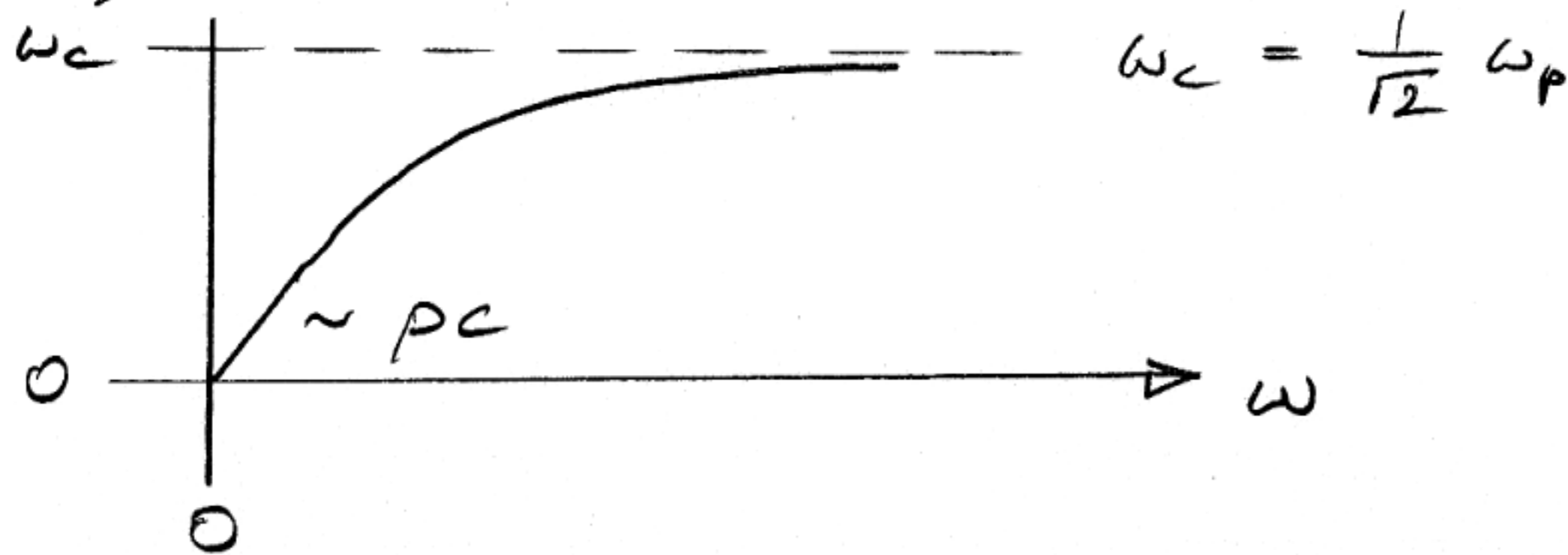
Die Lösung $\omega(p)$ steigt streng monoton mit wachsendem p , und hat die Asymptote ω_c .



Zusammenfassend haben wir festgestellt, daß Lösungen nur im Sperrgebiet von $\epsilon(\omega)$ existieren und daß die Wellenlängen hinreichend klein sein müssen: $p < p_0 = \omega_0/c$.

κ läßt sich dann aus (B) für gegebenes ω berechnen und κ^{-1} gibt dann die Tiefe der oberflächennahen Welle an.

Für Oberflächenplasmonen ($\omega_0 \rightarrow 0$) hat man $\rho_0 = 0$ und $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega_p$. Oberflächenplasmonen existieren also für alle Wellenlängen. Ihre Dispersion bei kleiner ω ist linear.



E-Feld einer Oberflächenplasmonenwelle.

6. Statische Felder

Für statische Felder reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen auf zwei unabhängige Sätze von Gleichungen für elektrische und magnetische Phänomene

Elektrostatik

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= 0 \end{aligned}$$

Magneto-Statik

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Aufgrund von $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$ lässt sich die Elektrostatik durch die Einführung eines skalaren Potentials

$$\varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

auf die skalare Poisson-Gleichung reduzieren

$$\Delta \varphi(\vec{x}) = -4\pi \rho(\vec{x})$$

Aufgrund von $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ lässt sich die Magneto-Statik durch die Einführung eines Vektorpotentials

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

in Coulomb-Berechnung, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, auf die vektorielle Poisson-Gleichung reduzieren^{*)}

$$\Delta \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

*) Nebenrechnung

$$\frac{4\pi}{c} \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = -\Delta \vec{A}$$

Wir kennen bereits spezielle Lösungen der skalaren und vektoriellen Poisson-Gleichung

$$\varphi_p(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$\vec{A}_p(\vec{x}) = \int d^3y \frac{1}{c} \frac{\vec{j}(\vec{y})}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

Man bezeichnet diese partikulären Lösungen auch als Poisson-Formeln. Sie geben die skalaren und vektoriellen Volumenpotentiale zu vorgegebener Ladungs- und Stromverteilungen an, mit der Eigenschaft, daß φ_p und \vec{A}_p im Unendlichen verschwinden.*)

Man bezeichnet $G^0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}$ als die freie Greensche Funktion der Poisson-Gleichung. Als Distribution aufgefaßt ist $G^0(\vec{x})$ bis auf eine Normierung eine Fundamentallösung des Laplace-Operators:

$$\Delta G^0(\vec{x}) = -4\pi \delta(\vec{x})$$

Falls die Inhomogenität der Poisson-Gleichung gleich Null ist ($\rho=0, \vec{j}=0$), so reduziert sie sich auf die Laplace-Gleichung

$$\Delta \varphi(\vec{x}) = 0$$

deren Lösungen als harmonische Funktionen bezeichnet werden.

*) Bemerkung: Die durch die Poisson-Formel gegebene Lösung der Poisson-Gleichung verhält sich im Unendlichen wie $O(1/|\vec{x}|)$. Durch diese Randbed. wird sie auch eindeutig bestimmt, da die Differenz von zwei Lösungen eine harmonische Fkt in \mathbb{R}^3 ist ($\Delta \varphi = 0$) mit $\varphi(x \rightarrow \infty) = 0$. Eine solche Funktion (siehe 6.1) ist identisch Null.

6.1. Potentialtheorie

a) Allgemeine Theoreme

Mittelwertformel: Der Wert des Potentials φ im Zentrum \vec{x} einer Kugel $K_R(\vec{x})$ mit Radius R lässt sich als Mittelwert des Potentials über die Kugeloberfläche schreiben

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(\vec{x})} \varphi(\vec{y}) \, d\mathcal{A}(\vec{y})$$

Beweis: Zum Beweis verwenden wir die 2. Greensche Formel für $K_R(\vec{x})$

$$\int_{\partial K_R} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\mathcal{A} = \int_{K_R} (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV \quad (*)$$

φ sei eine harmonische Funktion: $\Delta \varphi = 0$.

Setze zunächst $\psi = 1$. Dann folgt aus (*)

$$(1) \quad \int_{\partial K_R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\mathcal{A} = 0 \quad \text{für jede harm. Fkt.}$$

Nähert man $\psi = G(\vec{y}, \vec{x}) = \frac{1}{|\vec{y} - \vec{x}|}$ ($\Delta_y G = -4\pi \delta(\vec{x})$)

Dann folgt aus (*) und (1)

$$\begin{aligned} (2) \quad \varphi(\vec{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\mathcal{A} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_R} \varphi(\vec{y}) \frac{(\vec{y} - \vec{x}) \cdot \vec{n}}{|\vec{y} - \vec{x}|^3} d\mathcal{A}(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R} \varphi(\vec{y}) d\mathcal{A}(\vec{y}) \end{aligned}$$

Folgerungen:

(a) Ist φ eine harmonische Funktion im ganzen Raum und $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\vec{x}) = 0$, dann

verschwindet φ identisch, $\varphi \equiv 0$. (Um jeden Punkt im Raum lässt sich eine Kugel legen, deren Radius dann gegen ∞ strebt)

(b) Falls $\varphi(\vec{y}) > \varphi(\vec{x})$ auf irgendeinem Teil der Kugeloberfläche, dann muss $\varphi(\vec{y}) < \varphi(\vec{x})$ auf einem anderen Teil der Kugeloberfläche sein. Folglich kann das Potential $\varphi(\vec{x})$ in einem Gebiet, in dem sich keine Ladungen befinden, weder ein Maximum noch ein Minimum haben. Insbesondere gibt $\varphi = \text{konstant}$ in ladungsfreien Zonen, die von einer Äquipotentialfläche berandet sind

(c) Earnshaw Theorem: Eine statische Anordnung von frei beweglichen Ladungen ist instabil, oder bestenfalls metastabil, da sich keine der Ladungen in einem lokalen Minimum der potentiellen Energie der anderen Ladungen befinden kann (nach b).

↳ Instabilität klassischer Materie, die durch elektrostatische Kräfte miteinander wechselwirken.

Eindeutigkeitssatz: Eine im Gebir G harmon. Funktion φ ist eindeutig bis auf eine Konstante bestimmt, wenn kanonische Randbedingungen vorliegen, d.h. $\varphi(\vec{y})$ oder $\vec{n} \cdot \text{grad } \varphi(\vec{y})$ auf dem Rand ∂G von G vorgegeben sind.

Beweis: Seien φ_1 und φ_2 harmonische Fkt'n mit identischen Randbedingungen. Dann ist $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$ eine harmonische Funktion mit den Randbedingungen $\psi(\vec{y}) = 0$ oder $\partial_n \psi(\vec{y}) = 0$ d.h. $\psi(\vec{y}) \partial_n \psi(\vec{y}) = 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial G} \psi \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n} \, dA = \int_{\text{Gauß } G} \vec{\nabla} (\psi \vec{\nabla} \psi) \, dV = \\ &= \int_G ((\vec{\nabla} \psi)^2 + \underbrace{\psi \Delta \psi}_{=0}) \, dV = \int_G (\vec{\nabla} \psi)^2 \, dV \end{aligned}$$

und somit muss $\vec{\nabla} \psi \equiv 0$ auf G sein $\rightarrow \psi \equiv \text{konstant}$ auf G .

Folgerung: Die kanonischen Randbedingungen legen auch die Lösung der Poisson-Gleichung eindeutig^{*)} fest. Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_p(\vec{x}) + \psi(\vec{x})$$

wobei $\varphi_p(\vec{x})$ durch die Poisson-Formel gegeben ist und $\psi(\vec{x})$ eine harmonische Funktion mit kanonischen RB'n ist.

Beweis: $\Delta \varphi_{1,2} = -4\pi \rho$ mit kanon. Randbed.

Dann $\tilde{\varphi}(x) := \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ eine harmonische Funktion $\Delta \tilde{\varphi} = 0$ mit kanon. RB'n der Form $\tilde{\varphi} \partial_n \tilde{\varphi} = 0$,

$$\stackrel{\text{A.O.}}{\Rightarrow} \tilde{\varphi} \equiv \text{konstant}$$

*) bis auf Konstante

Da die Lösung eindeutig ist muß man nur
noch eine Lösung finden

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi_p(\vec{x}) + \psi(\vec{x}), \quad \Delta \psi = 0$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \rho + 0$$

$$\bullet \varphi(\vec{x})|_{\partial G} = \varphi_p(\vec{x})|_{\partial G} + \psi(\vec{x})|_{\partial G}$$

$$\psi(\vec{x})|_{\partial G} = (\varphi - \varphi_p)|_{\partial G}$$

• analog für $\partial_n \varphi$

b) Greensche Funktionen und Randwertprobleme der Elektrostatik

Wir schreiben zunächst die Poissongleichung in eine Integralgleichung um. Dazu verwenden wir die 2. Greensche Identität

$$\int_V (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) d\Gamma$$

und wählen für φ eine Lösung der Poissongleichung, $\Delta \varphi = -4\pi \rho$, und für ψ die freie Greensche Funktion, $G^0(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$.
Dann folgt

$$\begin{aligned} & - \int_V \left(\varphi 4\pi \delta(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} 4\pi \rho(\vec{y}) \right) d^3y = \\ & = \int_{\partial V} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} - \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial}{\partial n_y} \varphi \right) d\Gamma_y \end{aligned}$$

oder

$$(*) \quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d^3y + \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \left[\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} - \varphi \frac{\partial}{\partial n_y} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] d\Gamma_y$$

d.h. also die Ladungsdichte im Volumen V und $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \varphi$ bzw. φ auf ∂V bestimmen das Potential $\varphi(\vec{x})$ in V .

Vorhandene Ladungen außerhalb V gehen nur implizit über die Oberflächen in Betracht ein.

Ist V ladungsfrei, dann ist φ vollständig durch seine Werte und Normalableitung auf ∂V bestimmt. Diese überraschende

Feststellung besagt, daß (*) keine Lösung eines Randwertproblems sein kann, sondern nur eine Integralbeziehung für φ , da die willkürliche Festlegung von sowohl φ wie auch $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ (Cauchy Randbedingungen) eine Überbestimmung des Problems darstellt; siehe Eindeutigkeitsatz.

Anstatt der freien Greenschen Funktion G^0 setzen wir nun die Greensche Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} + h(\vec{x}, \vec{y}), \quad \Delta h = 0$$

in die 2. Greensche Identität ein. Da auch $G(\vec{x}, \vec{y})$ die Poissongleichung für eine Punktladung löst, $\Delta G = -4\pi\delta$, folgt analog zu obiger Rechnung

$$(*) \quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[G(\vec{x}, \vec{y}) \frac{\partial \varphi(\vec{y})}{\partial n_y} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n_y} \right] d\tau_y$$

Wir diskutieren nun die Fälle von Dirichlet und von Neumann Randbedingungen getrennt weiter

Dirichlet Randbedingungen

Die Freiheit in der Wahl der Greenschen Funktion G (h ist eine beliebige harmonische Funktion) kann man verwenden, um die Integraldarstellung der Poissongleichung zu vereinfachen.

Bei Dirichlet Randbedingungen wählen wir für G spezielle D-RB:

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

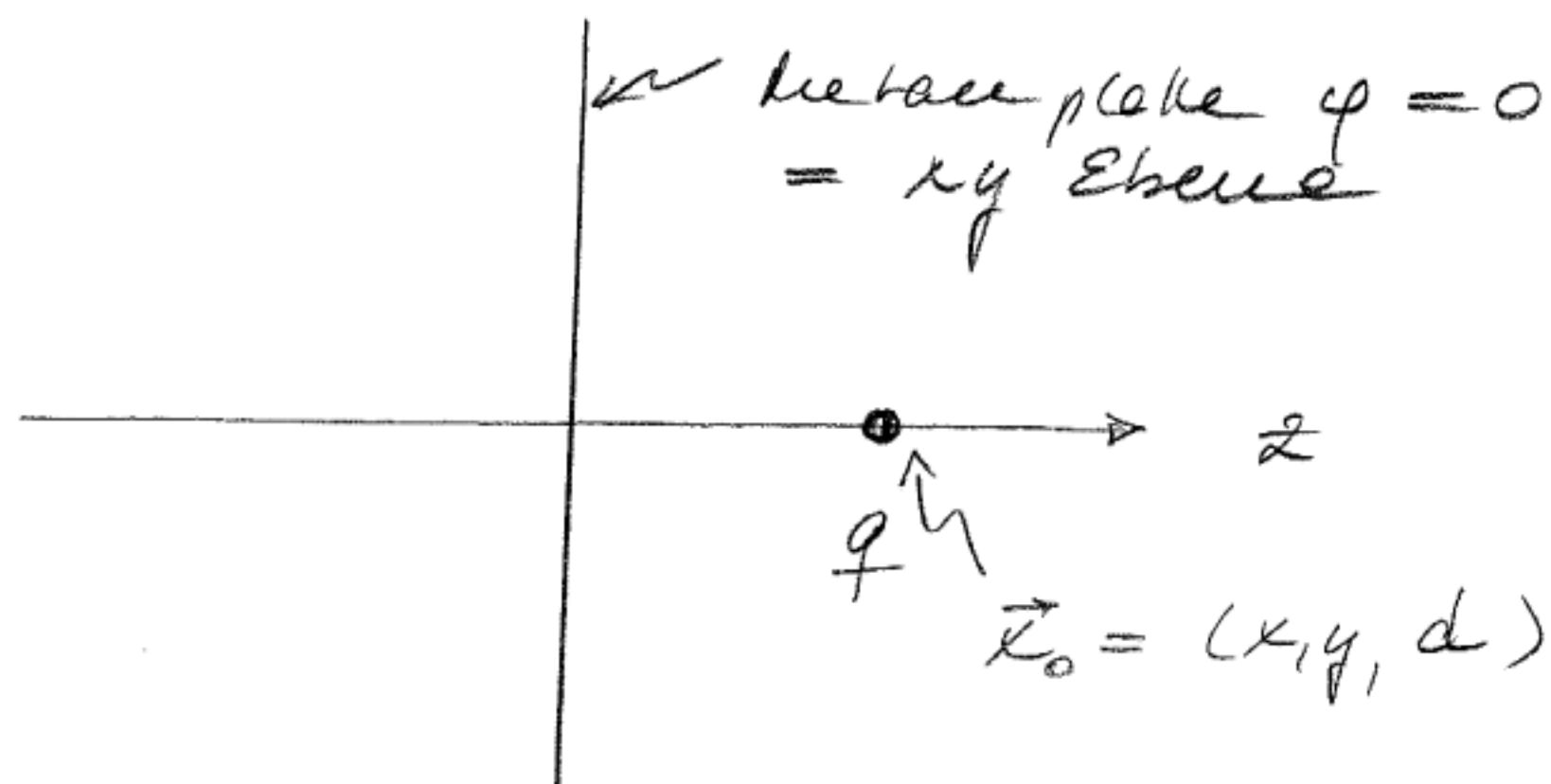
Dann folgt

$$(*)_{\text{D}} \quad \varphi(\vec{x}) = \int_V \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) d^3y - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V} \varphi(\vec{y}) \frac{\partial G(\vec{x}, \vec{y})}{\partial n_y} dA_y$$

als vollständige Lösung der D-RB der Poisson-Gleichung. Man hat die Lösung der Poissongleichung für eine allgemeine Ladungsverteilung damit reduziert auf die Lösung für eine Punktladung. Kennt man die Lösung für eine Punktladung, die Greensche Funktion G , so findet man die allgemeine Lösung durch Integration $(*)_{\text{D}}$

Beispiele

(a) Ladungsverteilung vor einer unendlich ausgedehnten geerdeten Metallplatte \rightarrow
 Betrachte Punktladung vor Metallplatte



$$\varphi(x, y, z=0) = 0$$

$$\varphi \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad x, y \rightarrow \pm \infty$$

Wir suchen

$$G = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} + h(\vec{x}, \vec{x}_0)$$

wobei $h(\vec{x}, \vec{x}_0)$ eine harmonische Funktion im rechten Halbraum ($z > 0$) ist, so daß $G(x, y, z=0) = 0$.

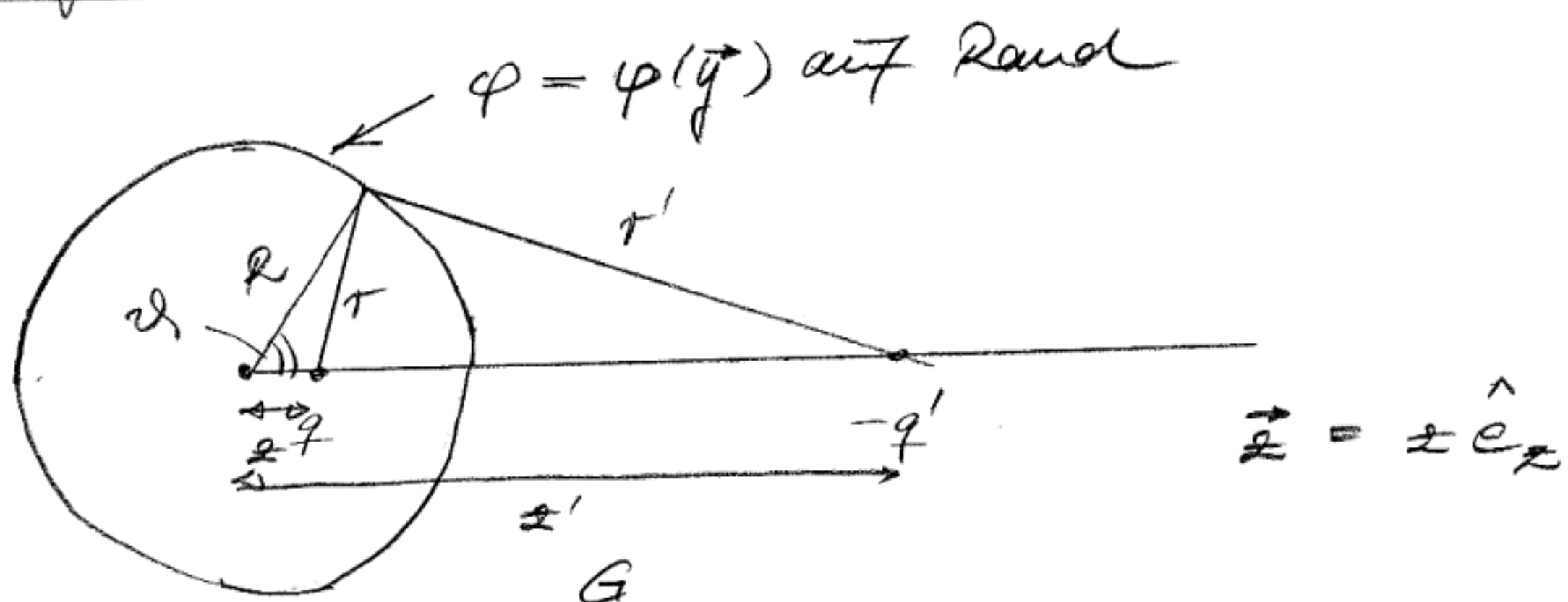
Lösung: Da h Lösung der Poissongleichung im rechten Halbraum sein soll, kann man versuchen h aus Ladungsverteilungen im linken Halbraum so zu bestimmen, daß die Randbed. erfüllt ist. Diese Methode heißt Spiegelladungsmethode.

Für den vorliegenden Fall wählt man $h(\vec{x}, \vec{x}_0)$ als das Potential der Spiegelladung ($-q = -1$) bei $\vec{x}'_0 = -\vec{x}_0$. Dann gilt offenbar $\Delta h = 0$ für $z > 0$. Somit folgt:

$$G = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_0|}$$

$$\varphi(\vec{x}) = \int \rho(\vec{y}) \left(\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} - \frac{1}{|\vec{x} + \vec{x}_0|} \right) d^3 y$$

(b) Ladungsverteilung innerhalb einer geerdeten Kugel K mit Radius R



Da Potential auf der Kugeloberfläche immer Null, wenn

$$\frac{q}{r} = -\frac{q'}{r'}$$

gilt. Aus der Skizze entnimmt man

$$r^2 = (\vec{x} - \vec{x}')^2 = z^2 + R^2 - 2zR \cos \alpha$$

$$r'^2 = (\vec{x}' - \vec{x})^2 = z'^2 + R^2 - 2z'R \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{q^2}{q'^2} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{z^2 + R^2 - 2zR \cos \alpha}{z'^2 + R^2 - 2z'R \cos \alpha}$$

Diese Bedingung ist offenbar dann für alle α erfüllt, wenn

$$R^2 = z z'$$

$$\frac{q^2}{q'^2} = \frac{z^2 + z z' - 2zR \cos \alpha}{z'^2 + z z' - 2z'R \cos \alpha} = \frac{z}{z'} \frac{z + z' - 2R \cos \alpha}{z' + z - 2R \cos \alpha}$$

$$= \frac{z}{z'} \quad \Rightarrow \quad q'^2 = q^2 \frac{z'}{z} = q^2 \frac{R^2}{z^2}$$

Folglich lautet die gesuchte Green'sche Funktion

$$G(\vec{x}, \vec{z}) = \frac{1}{|\vec{x} - \vec{z}|} - \frac{R/z}{|\vec{x} - \vec{z}'|} \quad ; \quad \vec{z}' = \vec{z} \cdot \left(\frac{R}{z}\right)^2$$

Sie erfüllt die Randbedingung $G=0$ auf der Kugeloberfläche.

Nun gilt auf dem Rand ∂K der Kugel

$$\frac{\partial}{\partial n_y} G(\vec{x}, \vec{y}) = \underbrace{\frac{\vec{y}}{R}}_{\hat{n}_y} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}} G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{1}{R} \frac{R^2 - r^2}{|\vec{x} - \vec{y}|^3}$$

so daß die Lösung des D-RB lautet

$$\varphi(\vec{x}) = \int G(\vec{x}, \vec{y}) \rho(\vec{y}) d^3 y + \frac{R^2 - x^2}{4\pi R} \int_{|\vec{y}|=a} \frac{\varphi(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} d\tau_y$$

Aus dieser Beziehung kann man auch wieder die Mittelwertformel für harmonische Funktionen erhalten:

$$\rho = 0, \quad \vec{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{R^2}{4\pi R^4} \int_{|\vec{y}|=a} \varphi(\vec{y}) d\tau_y \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_{|\vec{y}|=a} \varphi(\vec{y}) d\tau_y \end{aligned}$$

Von Neumann Randbedingungen

$$\text{Naheliegender } \frac{\partial G}{\partial n_y}(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \forall \vec{y} \in \partial V$$

$$\text{Jedoch } \underbrace{\int_V \nabla_y^2 G(\vec{x}, \vec{y}) d^3y}_{=} = -4\pi \int \delta(\vec{x} - \vec{y}) d^3y = -4\pi$$

$$\begin{aligned} \int_V \vec{\nabla}_y (\vec{\nabla}_y G) d^3y & \stackrel{\text{Gauss}}{=} \oint_{\partial V} \vec{\nabla}_y G d\vec{f}_y \\ & = \oint_{\partial V} \underbrace{\vec{\nabla}_y G \cdot \vec{n}_y}_{\frac{\partial G}{\partial n_y}} d\vec{f}_y \end{aligned}$$

also $-4\pi = \oint \frac{\partial G}{\partial n_y} d\vec{f}_y$ und folglich kann man nicht $\frac{\partial G}{\partial n_y} = 0$ wählen.

$$\text{Wähle } \frac{\partial G}{\partial n_y} = -\frac{4\pi}{|\partial V|} \quad ; \quad |\partial V| = \text{Fläche der Oberfläche von } V$$

für $\vec{y} \in \partial V$

Dann

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}) & = \langle \varphi \rangle_{\partial V} + \int_V \rho(\vec{y}) G(\vec{x}, \vec{y}) d^3y \\ & \quad + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} G \frac{\partial \varphi}{\partial n_y} d\vec{f}_y \end{aligned}$$

wobei $\langle \varphi \rangle$ der Mittelwert der Potentiale über den Rand ∂V des Gebiets V ist.

6.2. Lösungsmethoden für Randwertprobleme

a) Funktionentheorie

Falls man bei einem Randwertproblem alle Größen in einer Raumrichtung sehr viel langsamer ändern als in den beiden dazu senkrechten Richtungen, dann kann man in guter Näherung das ebene Problem lösen. Die Laplace Gleichung lautet dann

$$\boxed{\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0}$$

Derartige Probleme kann man auch behandeln einfach nur mit der Funktionentheorie behandeln.

Sei $f(z)$ mit $z = x + iy$ eine analytische Funktion. Zerlegt man f in Real- und Imaginärteil

$$f(z = x + iy) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

so gelten die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}}$$

und folglich sind sowohl φ wie ψ harmonische Funktionen:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \text{ analog für } \psi.$$

Man kann daher $\varphi(x, y)$ als die Potentialfunktion eines elektrostatischen Problems ansehen, sofern nur die analytische Fkt. $f(z)$ so geschickt gewählt ist.

Aus den Cauchy-Riemann Dgl'n folgt weiterhin, daß

$$\vec{\nabla} \varphi \perp \vec{\nabla} \psi = 0$$

ist, d. h. die Äquipotentiallinien von φ und ψ stehen \perp aufeinander (und damit natürlich auch die Feldlinien).

Beispiel: Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = z^2, \text{ Aus}$$

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

ergibt sich

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2, \quad \psi = 2xy.$$

Für $\varphi = \text{const}$ erhält man das elektrische Feld einer geladenen metallischen Kante \rightarrow (a)

Für $\psi = \text{const}$ erhält man das Feld einer neg. Quadrupol-Linse \rightarrow (b)

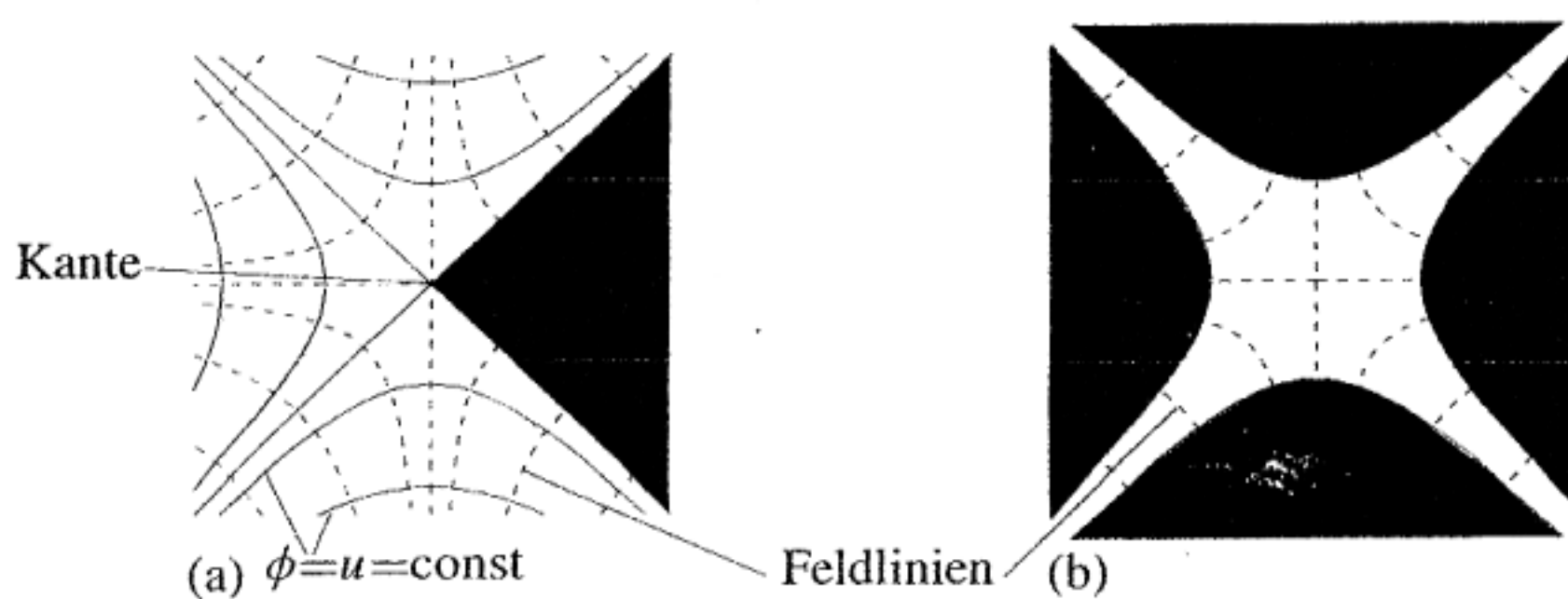


Abb. 4.29: (a) Feldlinien und Äquipotentialflächen einer geladenen metallischen Kante in zwei Dimensionen. (b) Feldlinien und Äquipotentialflächen einer Quadrupol-Linse.

Konforme Abbildung

Betrachte eine konforme, d.h. winkeltreue, Abbildung der Punkte (x, y) in der z -Ebene auf Punkte (ξ, η) in der ζ -Ebene:

$$z = x + iy = F(\zeta) = F(\xi + i\eta)$$

Nun sei in der z -Ebene eine Anordnung A von Leitern gegeben und hier für das Potentialproblem gelöst, d.h. eine Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ gefunden, die an bestimmten Linien von A konstant wird und der Laplacegleichung genügt. φ sei der Realteil der analytischen Funktion $f = \varphi + i\psi$. Ferner sei in der ζ -Ebene eine Anordnung von Leitern B gegeben und für sie eine Lösung des Potentialproblems gesucht, Löser sind eine Funktion $F(\zeta) = z$ angeben, die die z -Ebene so auf die ζ -Ebene abbildet, daß hierbei die Figur A in die Figur B übergeht, so ist der Realteil der Funktion $f(F(\zeta))$ die gesuchte Potentialfunktion $\phi(\xi, \eta)$ für die Anordnung B . Denn ϕ genügt wie φ der Laplace-Gleichung und ist per Konstruktion auf den gewünschten Linien B konstant.

b) Trennung der Variablen: allgemein

Für bestimmte symmetrische Probleme kann man die Lösung der Laplacegleichung als Produkt von Funktionen

$$\varphi(x, y, z) = f(q_1) g(q_2) h(q_3)$$

schreiben, wobei q_1, q_2 und q_3 krummlinige Koordinaten sind, die die Symmetrie des Problems widerspiegeln. Da jede der Funktionen nur von einer Variable abhängt, ergeben sich dann gewöhnliche austatt partielle Differentialgleichungen, und somit eine signifikante Vereinfachung des Problems. Die nennt man die Methode der Trennung von Variablen. Falls eine oder mehrere der krummlinigen Koordinaten einen beschränkten Definitionsbereich haben (z.B. $0 \leq \phi \leq 2\pi$ für den Azimutwinkel), oder falls die Randbedingungen des Problems einen endlichen Definitionsbereich erzwingen, dann findet man im allgemeinen, daß die Lösung als eine Summe von Eigenfunktionen der Differentialgleichung ^{zu} dieser Koordinaten dargestellt werden kann.

Kann kann nicht alle Probleme durch Trennung der Variablen lösen. Für den Laplaceoperator hat man nur 11 krummlinige Koordinatensysteme gefunden, in denen der Laplaceoperator separabel ist.

c) Trennung der Variablen; Laplace Gleichung
in rechtwinkligen Koordinaten

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

$$\varphi = \underline{f(x) g(y) h(z)} \quad \underline{\text{ANSATZ}}$$

$$\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

Diese Gleichung kann nur gelten, falls jeder Term konstant ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha'^2 \\ \frac{1}{g} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \beta'^2 \\ \frac{1}{h} \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \gamma'^2 \end{array} \right.$$

wobei $\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 0$. Aus letzterer Relation ist klar, dass die Separationskonstanten α' , β' und γ' nicht alle reell und auch nicht alle imaginär sein können. Falls zwei der Konstanten reell sind, dann muss die dritte imaginär sein und umgekehrt. Falls eine Konstante verschwindet, dann muss eine der verbleibenden Konstanten reell und die andere imaginär sein.

Imaginäre Separationskonstante (z.B. $\alpha' = i\alpha$)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\alpha^2 f$$

$$\Rightarrow f \sim e^{i\alpha x} \quad \text{oszillierende Lösung}$$

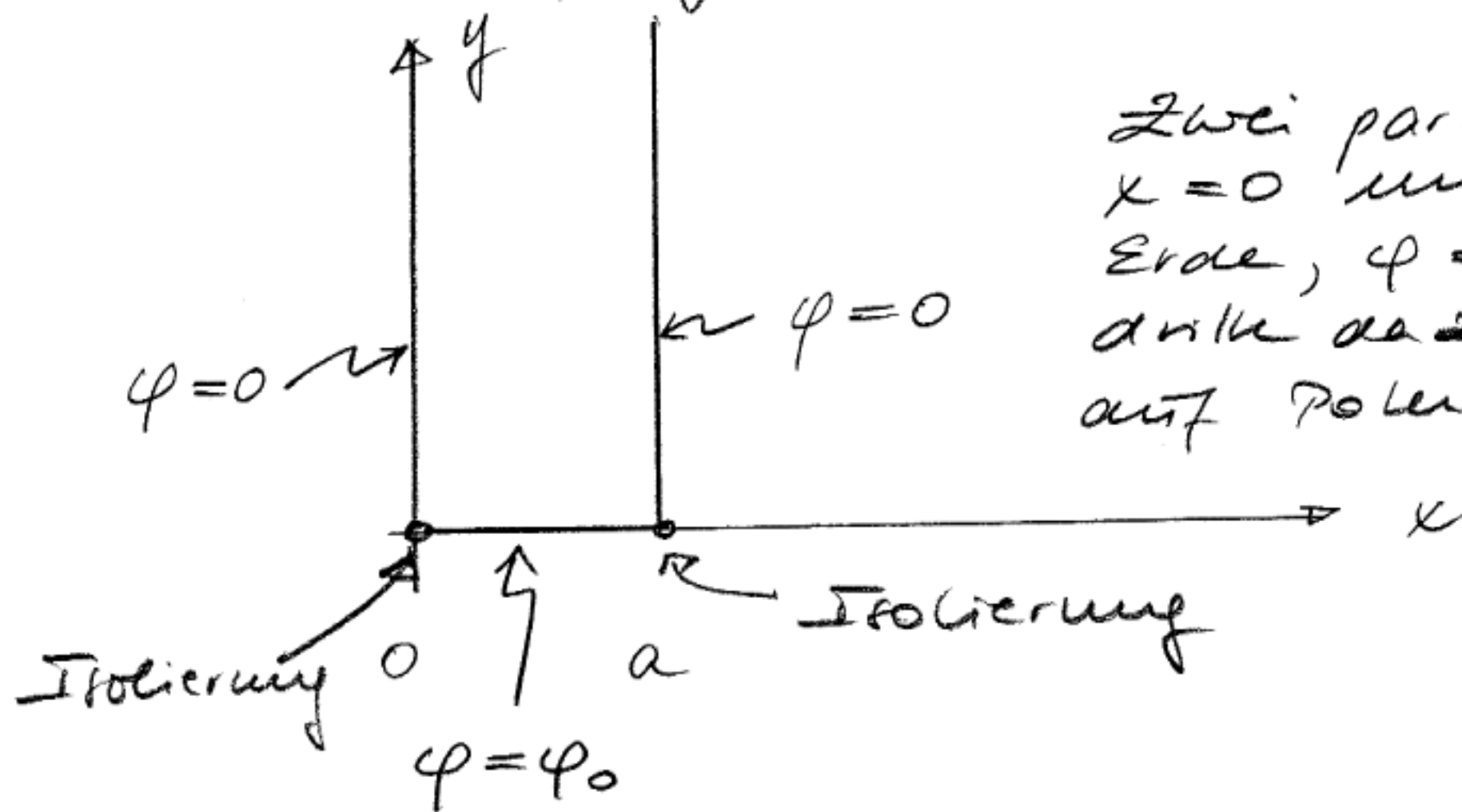
Reelle Separationskonstante (z.B. $f' = f \in \mathbb{R}$)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = f^2 h \Rightarrow h \sim e^{\pm f^2 y}$$

exponentielle Lösung

Wenden der Separationsvariablen reell oder imaginär ist hängt von jeweiliger Randwertproblem ab.

Betrachte folgende konkrete Beispiele



Zwei parallele Ebenen bei $x=0$ und $x=a$ auf Erde, $\varphi=0$, und eine dritte dazu senkrechte Ebene auf Potential $\varphi=\varphi_0$

$h = \text{constant}$ wegen Symmetrie, d.h. $f' = 0$
 x Dimension eingeschränkt auf $[0, a]$
 y Dimension — " — auf $[0, \infty]$

Bruchen oszillierende Lösung in x und exponentielle abfallende Lösung in y

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x, y) = f(x) g(y)$$

$$f(x) \sim \cos(\lambda_k x), \sin(\lambda_k x)$$

$$g(y) \sim e^{-\beta y}$$

weil $f(0) = 0$ nur sin-Lösung möglich

Bedingungen: (1) $\lambda_k^2 = \beta^2$

(2) $\lambda_k a = k\pi$; $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x) e^{-\lambda_k y}$$

Bestimme A_k aus der Randbedingung

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0 = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\lambda_k x)$$

A_k sind also die Fourierrekoef. der Funktion $\varphi_0(x)$

$$A_k = \frac{2}{a} \int_0^a \varphi_0(x) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx$$

$$\uparrow = \frac{2}{a} \varphi_0 \frac{a}{k\pi} 2 = \frac{4}{\pi} \varphi_0 \cdot \frac{1}{k}; k=1, 3, 5, \dots$$

$\varphi_0 = \text{konstant}$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = \frac{4}{\pi} \varphi_0 \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k} e^{-k\pi y/a} \sin \frac{k\pi x}{a}$$

ist die Lösung des Randwertproblems.

Ähnliche geartete Probleme mit kubischer Symmetrie können analog gelöst werden.

d) Feld eines geladenen Rotationsellipsoids

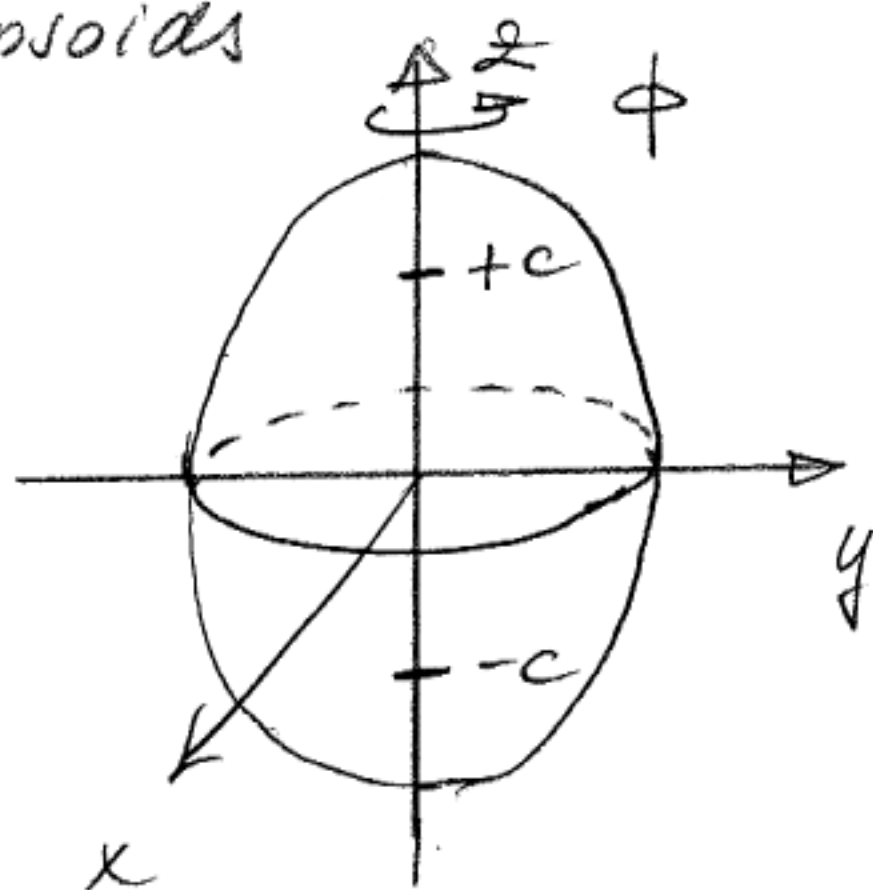
Oberfläche des Rotationsellipsoids

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

prolate Form $a > b$

Zylinderkoordinaten:

$$(r, z, \phi)$$



(i) Wahl geeigneter Koordinaten

Die Brennpunkte des Rotationsellipsoids liegen bei $z^2 = c^2 = a^2 - b^2$. Suche nun nach einer Schar von Flächen, die konfokal sind, d.h. alle die gleichen Brennpunkte $\pm c$ haben:

$$(*) \quad \frac{z^2}{c^2 \eta^2} + \frac{r^2}{c^2(\eta^2 - 1)} = 1$$

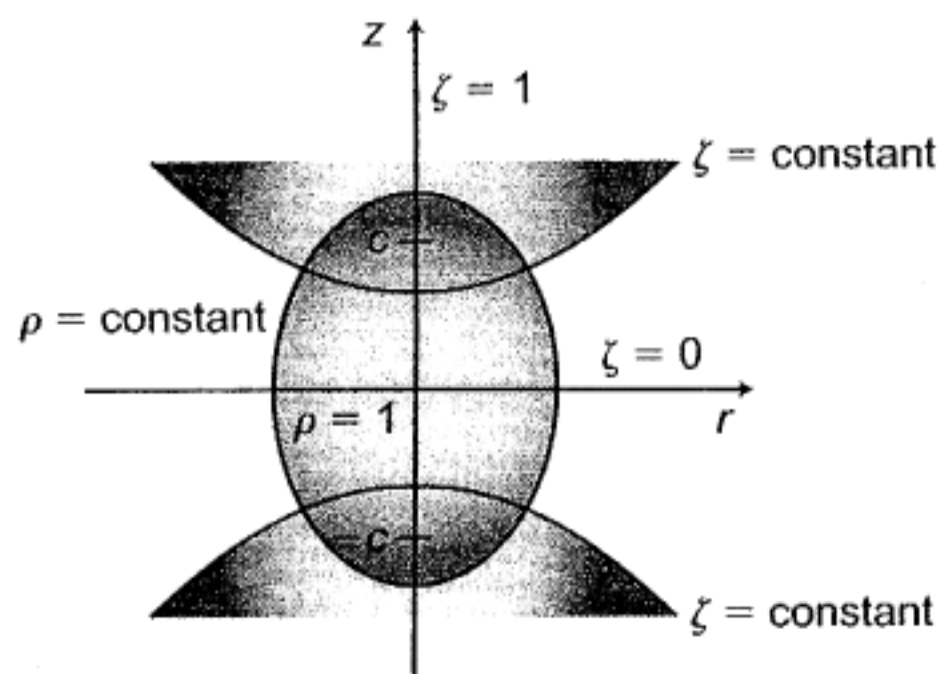
beschreibt diese gesuchten Flächen mit η als Scharparameter

Gegeben das Wertepaar (r, z) hat (*) als eine quadratische Gleichung für η^2 gelöst 2 Lösungen, die wir als ρ^2 und ξ^2 bezeichnen; man nennt sie elliptische Koordinaten (ρ, ξ) zum Punkt (r, z)

- Für $1 < \rho = \eta < \infty$ sind beide Terme in (*) positiv \rightarrow Flächen mit $\rho = \text{konstant}$ sind Rotationsellipsoide konfokal mit dem gegebenen Rotationsellipsoid, welche $\rho = \frac{a}{c}$ entspricht.

- Für $-1 < \xi = \eta < 1$ ist der erste Term in (4) positiv und der zweite Term negativ, so daß die Flächen $\xi = \text{konstant}$ Rotationshyperboloiden entsprechen, die ebenfalls konfokal sind mit Foki $\pm c$ (\rightarrow siehe Figur)
- Die dritte Koordinate ist durch den Azimutwinkel φ um die z-Achse gegeben; die entsprechenden Koordinatenflächen sind Ebenen durch die z-Achse.

Diese drei Familien von Koordinatenflächen sind an jedem Raumpunkt zueinander orthogonal.



Zusammenhang zwischen (r, z) und (ρ, ξ) :
 Dazu lösen wir die quadratische Gleichung für η^2 geschickt auf

$$\left(\frac{z^2}{c^2 \eta^2} + \frac{r^2}{c^2(1+\eta^2)} - 1 \right) \eta^2 (\eta^2 - 1)$$

$$= -(\eta^2 - \rho^2)(\eta^2 - \xi^2) = 0 \quad \text{für } \eta^2 = \rho^2$$

da ρ^2 und ξ^2 Wurzeln sind und der Koeffizient von η^4 gleich (-1) ist.

Setze $\eta^2 = 0$ und $\eta^2 = 1$

$$\begin{aligned} z &= c \rho \xi \\ \tau &= c \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \xi^2)} \end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen
elliptischen und zylindrischen
Koordinaten;
 $(\rho, \xi) \rightarrow (\tau, z)$

Dann ist

$$\begin{aligned} x &= \tau \cos \phi = c \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \xi^2)} \cos \phi \\ y &= \tau \sin \phi = c \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \xi^2)} \sin \phi \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt dann für Polar koord.

$$\begin{aligned} \tau^2 + z^2 &= c^2 (\rho^2 + \xi^2 - 1) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} c^2 \rho^2 \\ \cos^2 \Theta &= \frac{z^2}{z^2 + \tau^2} = \frac{\rho^2 \xi^2}{\rho^2 + \xi^2 - 1} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \xi^2 \end{aligned}$$

Die elliptischen Koordinaten (ρ, ξ, ϕ) sind daher für große Abstände vom Ursprung gleich den sphärischen Koordinaten $(R, \cos \Theta, \phi)$.

(ii) Lösung der Laplace Gleichung

Transformieren Laplacegl. auf ellipt. Koordinaten
(siehe Nebenrechnung)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\rho^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] + \\ &\frac{\rho^2 - \xi^2}{(\rho^2 - 1)(1 - \xi^2)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0. \end{aligned}$$

Für Probleme mit azimutaler Symmetrie,
wie sie für das gegebene Problem and vorliegt,
ist φ unabhängig vom Azimutwinkel ϕ .

Dann gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\rho^2 - 1) \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right] = 0 \right]$$

wofür wir den Separationsansatz

$$\left[\varphi(\rho, \xi) = R(\rho) Z(\xi) \right]$$

machen können. Dann müssen die Fkt'n R und Z den folgenden gewöhnlichen Dgln. genügen (Legendre - Gleichungen)

$$(1) \quad \frac{d}{d\rho} \left[(1 - \rho^2) \frac{dR}{d\rho} \right] + l(l+1)R = 0, \quad 1 \leq \rho < \infty$$

$$(2) \quad \frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{dZ}{d\xi} \right] + l(l+1)Z = 0, \quad -1 \leq \xi \leq 1$$

wobei wir die Separationskonstante zu $l(l+1)$ gewählt haben; Grund für Wahl wird später klar.

- (2) = Legendre Gleichung;
gehört zur allgemeineren Klasse der Sturm-Liouville Probleme.
- Die Endpunkte $\xi = \pm 1$, wo der Koeffizient $(1 - \xi^2)$ verschwindet, heißen singuläre Punkte.
Fall die Lösungen von (2) divergieren, dann nur an diesen Punkten.
- Da die Legendre Gleichung zweiter Ordnung ist, hat sie für jedes l zwei linear unabhängige Lösungen. Wir nennen diese $P_l(\xi)$ und $Q_l(\xi)$

Für ganzzahlige l , wählt man $P_l(\xi)$ als die Lösung, die an den Endpunkten $\xi = \pm 1$ regulär ist; $Q_l(\xi)$ ist dann die Lösung, die an diesen Punkten divergiert.

Potenzreihenansatz:

$$Z(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m$$

Einsetzen in (2) ergibt

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} + (l(l+1) - m(m+1))a_m \right] \xi^m = 0$$

Damit die für alle $-1 \leq \xi \leq 1$ gilt, muss jeder Term verschwinden. Dies führt auf die Rekursionsformel

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} = (m(m+1) - l(l+1))a_m$$

Wir können daher Lösungen konstruieren, indem wir entweder $a_0 = 0$ oder $a_1 = 0$ wählen. Dann bestehen die Lösungen entweder aus ungeraden ($a_0 = 0$) oder geraden ($a_1 = 0$) Potenzen in ξ .

Eine Wahl entspricht $P_l(\xi)$, die andere Wahl der linear unabh. Lösung $Q_l(\xi)$.

Die Potenzreihe divergieren allerdings an den Punkten $\xi = \pm 1$ wenn die Reihe nicht abbricht:

$$\frac{a_{m+2}}{a_m} \rightarrow 1 \text{ für } m \rightarrow \infty.$$

Die Reihe kann nur dann abbrechen, wenn

die Separationskonstante $l \in \mathbb{N}$ ist!

Dann bricht die Reihe bei $m=l$ ab.

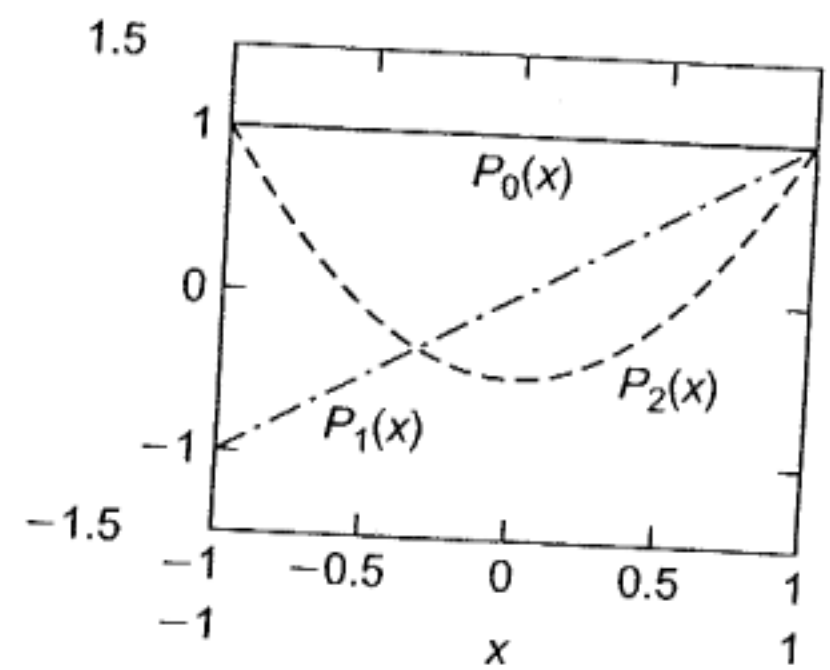
Wähle die Normierung so, daß $P_2(1) = 1$.

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$



allgemein gilt

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

(Rodriguez Formel für Legendre Polynome)

Beispiele

(i) $l=2$: Reihe bricht bei $m=2$ ab

$$\rightarrow a_1 = 0, a_0 = a \neq 0$$

(andere Wahl führt zu keinem Abbruch der Reihe)

$$2 \cdot 1 a_2 = -2 \cdot 3 a \rightarrow a_2 = -3a$$

$$\rightarrow P_2 = -a(3x^2 - 1)$$

$$\text{mit } P_2(1) = 1 \text{ folgt } a = -1/2.$$

(ii) $l=3$: Reihe bricht ab bei $m=3$

$$\rightarrow a_0 = 0, a_1 = a$$

$$3 \cdot 2 a_3 = (2 - 3 \cdot 4) a$$

$$6 a_3 = -10 a$$

$$P_3(x) = -a \left(\frac{10}{6} x^3 - 1 \right)$$

$$P_3(1) = -a \left(\frac{10}{6} - 1 \right) = -\frac{4}{6} a \Rightarrow a = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

Beweis der Rodrigue's Formel

Definiere $\tilde{z}(\xi) := k(\xi^2 - 1)^l$

mit k einer Konstante

Dann gilt

$$(1 - \xi^2) \frac{d\tilde{z}}{d\xi} + 2l\xi\tilde{z} = 0$$

Differenziert man diesen Ausdruck $(l+1)$ mal
so findet man

$$\frac{d}{d\xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{d^{l+1}\tilde{z}}{d\xi^{l+1}} \right] + l(l+1) \frac{d^l\tilde{z}}{d\xi^l} = 0$$

$\nearrow \frac{d^l\tilde{z}}{d\xi^l}$ ist Lösung der Legendre Gleichung

Wähle $k = \frac{1}{2^l l!}$ so daß $P_l(1) = 1$.

Die Legendre Polynome sind für unterschiedliche Werte von l im Intervall $-1 \leq \xi \leq 1$ orthogonal, d.h.

$$\int_{-1}^{+1} P_l(\xi) P_{l'}(\xi) d\xi = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

Dies zeigt man leicht durch Verwendung der Rodrigues-Formel und sukzessiver partieller Integration. Da die Potenzen von ξ im Intervall $-1 \leq \xi \leq 1$ einen vollständigen Satz von Funktionen darstellen, sind auch die Legendre Polynome vollständig. Wir können daher jede Funktion $f(\xi)$ in der Form

$$f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(\xi)$$

mit den Koeffizienten

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\xi) P_l(\xi) d\xi$$

schreiben.

(1) Legendre Gleichung nur $1 \leq \rho < \infty$

○ Hier entspricht der reguläre Punkt $\rho = 1$ dem Ursprung des Koordinatensystems.

Wenn wir also Lösungen der Legendre Gleichung suchen, die diesen Punkt enthalten, so müssen wir die regulären Lösungen $P_\ell(\rho)$ verwenden. Falls aber die Lösung in einem Raumgebiet gesucht wird, das $\rho = 1$ nicht enthält, also hier außerhalb des Rotationsellipsoids, können

○ wir auch die linear unabh. Funktionen $Q_\ell(\rho)$ hinzunehmen. Diese divergieren Funktionen nennt man auch Legendre Funktionen der 2. Art.

Da für $1 \leq \rho < \infty$ der Potenzreihenansatz nicht konvergiert, außer man bricht die Reihe ab, müssen wir die Lösung Q_ℓ auf einem anderen Weg finden.

○ Sei $P_\ell(\rho) = P_\ell(\rho) S_\ell(\rho)$ die Lösung der Legendre Gleichung, und $S_\ell(\rho)$ eine noch zu bestimmende Funktion.

$$(\rho^2 - 1) (P_\ell S_\ell'' + 2P_\ell' S_\ell' + S_\ell P_\ell'') + 2\rho (P_\ell S_\ell' + S_\ell P_\ell') - \ell(\ell+1) S_\ell P_\ell = 0$$

○ wobei wir die Abkürzung $' = \frac{\partial}{\partial \rho}$ eingeführt haben.

Nun genügt aber P_ℓ der Legendre Gl

$$(\rho^2 - 1) P_\ell'' + 2\rho P_\ell' + \ell(\ell+1) P_\ell = 0$$

Folglich gilt

$$(\rho^2 - 1) (P_\ell S_\ell'' + 2P_\ell' S_\ell' + \cancel{S_\ell' P_\ell''}) - (\rho^2 - 1) \cancel{S_\ell' P_\ell''} + 2\rho (P_\ell S_\ell' + \cancel{P_\ell' S_\ell}) - 2\rho \cancel{P_\ell' S_\ell} = 0$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - 1) [2P_\ell' S_\ell' + P_\ell S_\ell''] + 2\rho P_\ell S_\ell' = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\rho} [(\rho^2 - 1) P_\ell^2 S_\ell'] = 0$$

$$\Rightarrow S_\ell(\rho) = a \int \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2 - 1) P_\ell^2(\tilde{\rho})}$$

wobei a eine Konstante ist

Wir wählen die Normierung so, daß

$$Q_\ell(\rho) = P_\ell(\rho) \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2 - 1) P_\ell^2(\tilde{\rho})}$$

$$\underline{l=0} : Q_0(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{d\tilde{\rho}}{(\tilde{\rho}^2 - 1)} = \operatorname{arccoth} \rho$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} ;$$

$$\rho \rightarrow \infty \quad \ln \frac{\rho+1}{\rho-1} = \ln \frac{1 + 1/\rho}{1 - 1/\rho} =$$

$$\approx \ln \left(1 + \frac{2}{\rho}\right) \approx \frac{2}{\rho} ;$$

$$\begin{aligned}
 \underline{l=1} : Q_1(\rho) &= \rho \int_{\rho}^{\infty} d\tilde{\rho} \frac{1}{(\tilde{\rho}^2-1)\tilde{\rho}^2} = \\
 &= \rho \left[\operatorname{arccoth} \tilde{\rho} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right] \\
 &= \rho \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\rho}+1}{\tilde{\rho}-1} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right] \\
 &\approx \rho \left[\frac{1}{\tilde{\rho}} + \frac{1}{3\tilde{\rho}^3} - \frac{1}{\tilde{\rho}} \right] = \frac{1}{3\rho^2}
 \end{aligned}$$

Damit läßt sich nun das ursprüngliche Problem sehr leicht lösen

(iii) Implementierung der Randbedingungen

$$\varphi(\rho, \xi) = 0 \quad \text{für } \rho = \frac{a}{c}$$

$$\varphi(\rho, \xi) = -c E_0 \rho \xi \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty$$

$$= -c E_0 P_1(\rho) P_1(\xi)$$

$$\rightarrow l=1$$

Um nun $\varphi(\rho, \xi) = 0$ auf dem Rand des Rotationsellipsoids zu erreichen addieren wir konstant $\cdot Q_1(\rho) P_1(\xi)$

$$\varphi(\rho, \xi) = E_0 c \rho \xi \left[\frac{\operatorname{arccoth} \rho - \frac{1}{\rho}}{\operatorname{arccoth} \frac{a}{c} - \frac{c}{a}} - 1 \right]$$

Auf der Oberfläche des Rotationsellipsoids
ist das elektrische Feld normal zu
der Oberfläche

$$E = - \frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{1}{h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$$

$$= E_0 \left(\xi \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{a^2 - c^2 \xi^2}} \left[1 + \frac{c^2}{\frac{a}{c}(a^2 - c^2) \left(\operatorname{arctanh} \frac{c}{a} - \frac{c}{a} \right)} \right] \right)$$

Für langgestreckte Rotationsellipsoide $\frac{a}{b} \gg 1$
kann die Erhöhung des elektrischen Feldes an
der Spitze ($\xi = 1$) extrem hoch sein

Der Krümmungsradius R der Oberfläche ist
 $R = b^2/a$. Für eine spitze Nadel ($\frac{R}{a} \ll 1$)
gilt

$$E \approx E_0 \frac{2a/R}{\ln(4a/R)}$$

$$E_0 = 5 \cdot 10^6 \text{ V/m}$$

$$a = 1 \text{ cm}, \quad R = 1 \mu\text{m}$$

$$\Rightarrow E \approx 10^{10} \text{ V/m}$$

Feld in Atomen und Molekülen

Diese Felderhöhung erklärt auch die Funken-
bildung eines Blitzableiters. Bevor der Blitz einschlägt,
wird das elektrische Feld an der Spitze des Stabes
so stark erhöht, dass die umgebende Luft ionisiert
wird. Dies stellt dann ein hoch leitendes

Medium dar, das rd nach oben in Richtung
des elektr. Feldes entweicht. Dies führt dann
dazu das die Ladung über die Spitze abfließt
und so den Blitz anzieht.

Schritte der Lösung waren

- ① Geeignete krummlinige Koordinatenystem
- ② Laplace Operator in diesen Koordinaten
- ③ Separationsansatz $PDE \rightarrow ODE$
- ④ Eigenfunktionen der ODE
- ⑤ Konstruktion der Lösung des RW-Problems
aus den Eigenfunktionen.

Dies ist die allgemeine vorgehensweise!

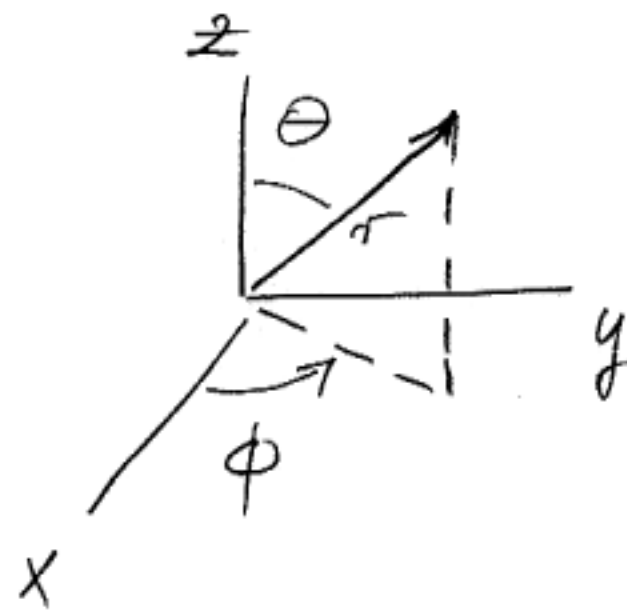
e) Sphärische Symmetrie: Kugel flächenfunktionen

Polar koordinaten

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$



Laplace operator ^{*)}

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Die Laplacegleichung lautet daher

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$
$$= \tau \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\tau \varphi)$$

Separationsansatz

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r} R(r) U(\cos \theta) F(\phi)$$

Substitution in die Laplacegleichung und anschließendes Teilen durch φ ergibt

$$(1 - \eta^2) \left\{ \frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{U} \frac{d}{d\eta} \left[(1 - \eta^2) \frac{dU}{d\eta} \right] \right\} + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\phi^2} = 0$$

wobei $\eta = \cos \theta$

Da der letzte Term nur eine Funktion von ϕ ist, muß er konstant sein. Die Separationskonstante bezeichnen wir mit $(-m^2)$:

$$\frac{d^2 F}{d\phi^2} = -m^2 F \quad \Rightarrow \quad F \sim e^{\pm im\phi} \quad (1)$$

*) Zu krummlinigen Koordinaten siehe Kapitel 7 in S. Großmann, Mathematische Einführungskurs, Teubner

Da das Potential eine eindeutige Funktion sein muß, gilt für F

$$F(\phi) = F(\phi + 2n\pi) \quad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \exp[i m (\phi + 2n\pi)] = \exp[i m \phi]$$

$$\rightarrow \exp[i m n \phi] = 1 \quad \rightarrow \underline{m \in \mathbb{Z}}$$

Folglich gilt

$$\frac{\Gamma^2}{R} \frac{d^2 R}{d\Gamma^2} + \frac{1}{u} \frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{du}{d\eta} \right] - \frac{m^2}{1-\eta^2} = 0$$

Der erste Term ist nur eine Funktion von r , folglich konstant. Wähle die Separationskonstante als $l(l+1)$

$$\frac{d^2 R}{d\Gamma^2} = l(l+1) \frac{R}{\Gamma^2} \quad (2)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{du}{d\eta} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] u = 0 \quad (3)$$

(2) hat die Lösungen Γ^{l+1} und Γ^{-l} so daß die allgemeine Lösung lautet

$$\frac{R(\Gamma)}{\Gamma} = A \Gamma^l + B \frac{1}{\Gamma^{l+1}}$$

A und B sind Konstanten, l ist noch nicht festgelegt.

Fall azimuthale Symmetrie vorliegt, reduzieren sich die Gleichung (3) auf die Legendre Differentialgleichung ($m=0$), die wir bereits ausführlich diskutiert haben.

Insbesondere helfen wir gelernt dass die Lösungen an den regulären Punkten $\eta = \pm 1$ divergieren wenn nicht l eine ganze Zahl ist.

Für $m \neq 0$ heißt (3) die verallgemeinerte Legendre Gleichung. Die Lösungen findet man auf die gleiche Weise wie bei der Legendre Differentialgleichung

Sei $z = (1-\eta^2)^l$

Diese Funktion genügt der Differentialgleichung

$$(1-\eta^2) \frac{dz}{d\eta} + 2lz = 0$$

Differenzieren man nun diese Gleichung $l+m+1$ fache und multipliziert anschließend mit $(1-\eta^2)^{m/2}$, so erhält man

$$(1-\eta^2)^{1+m/2} \frac{d^{l+m+2} z}{d\eta^{l+m+2}} - (m+1)\eta (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^{l+m+1} z}{d\eta^{l+m+1}} + (l+m+1)(l-m)(1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^{l+m} z}{d\eta^{l+m}} = 0, \quad (*)$$

Sei nun $V = (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^{l+m} z}{d\eta^{l+m}}$

Dann

$$\frac{dV}{d\eta} = (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^{l+m+1} z}{d\eta^{l+m+1}} - m\eta (1-\eta^2)^{m/2-1} \frac{d^{l+m} z}{d\eta^{l+m}}$$

so dass dann (*) sich schreiben lässt als

$$\frac{d}{d\eta} \left[(1-\eta^2) \frac{dV}{d\eta} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\eta^2} \right] V = 0$$

also die verallgemeinerte Legendre Gleichung für V

Mit der geeigneten (Konvention!) Normierung lautet die verallgemeinerte Rodriguez Formel

$$P_l^m(\eta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-\eta^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{d\eta^{l+m}} (\eta^2-1)^l$$

assoziierte Legendre Polynome

P_l^m verwendet für $m > l$

man zeigt leicht, dass

$$P_l^{-m}(\eta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\eta)$$

Damit nimmt m nur die ganzen Zahlen $-l \leq m \leq l$ an.

Die ersten assoziierten Legendre Polynome lauten

$$P_0^0(\eta) = P_0(\eta) = 1$$

$$P_1^0(\eta) = P_1(\eta) = \eta$$

$$P_1^1(\eta) = -\sqrt{1-\eta^2}$$

$$P_2^0(\eta) = P_2(\eta) = \frac{1}{2}(3\eta^2-1)$$

$$P_2^1(\eta) = -3\eta\sqrt{1-\eta^2}$$

$$P_2^2(\eta) = 3(1-\eta^2)$$

Die Legendre Polynome sind auf dem Intervall $-1 \leq \eta \leq 1$ ein vollständiger Satz von Funktionen, so daß man jede Funktion $f(\theta)$ im Intervall $0 \leq \theta \leq \pi$ durch diese darstellen kann. Um Funktionen $f(\theta, \phi)$ darzustellen, verwendet man die assoziierten Legendre Polynome in Produkten der Form $P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$. Wir definieren die Kugelflächenfunktionen

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

$$-l \leq m \leq l$$

Es gilt $Y_{lm}^*(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{l, -m}(\theta, \phi)$

und die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Daher kann man jede auf der Oberfläche der Einheitskugel definierte Funktion in der Form

$$f(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

darstellen, wobei wegen der Orthogonalität

$$a_{lm} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta Y_{lm}^*(\theta, \phi) f(\theta, \phi)$$

gilt.

"Kurzschlussweise"

$$|f\rangle = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm} |lm\rangle$$

$$\langle l'm' | lm \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

$$a_{lm} = \langle lm | f \rangle$$

Wichtige Relationen

$$(1) P_l(\cos \alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen

$$(2) \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$$

$r_{<} (>)$ sind die kleinere (größere) der
Längen r und r' ; $|\vec{x}| = r$, $|\vec{x}'| = r'$.

6.3. Multipolentwicklung

(a) Elektrostatische Multipole

Für eine gegebene Ladungsverteilung ρ lautet das elektrostatische Potential

$$\varphi(\vec{x}) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Sie interessieren nun für das Potential in großer Entfernung der Ladungsverteilung: $|\vec{x}| \gg d$, wobei d die räumliche Ausdehnung der Ladungsverteilung ist.

Dann kann man

$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|}$ im Integranden der Poissonformel in einer Taylorreihe entwickeln

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} - \vec{y} \cdot \vec{\nabla}_x \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Big|_{\vec{y}=0}$$

$$+ \frac{1}{2} y_i y_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \Big|_{\vec{y}=0} + \dots$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{y} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} y_i y_j \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} + \dots$$

Folglich gilt

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{r} \int d^3y \rho(\vec{y}) + \frac{\vec{x}}{r^3} \int d^3y \vec{y} \rho(\vec{y})$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}}{r^5} \int d^3y y_i y_j \rho(\vec{y}) + \dots$$

Mit den Definitionen

$$Q := \int d^3y \rho(\vec{y}) \quad \text{Gesamtladung}$$

$$Q_i := \int d^3y y_i \rho(\vec{y}) = p_i \quad \text{Dipolmoment}$$

$$Q_{ij} := \frac{1}{3} \int d^3y (3y_i y_j - |\vec{y}|^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{y}) \quad \text{Quadrupolmoment}$$

$$Q_{ij} = Q_{ji}$$

$$\text{Tr} Q = 0$$

folgt^{*)}

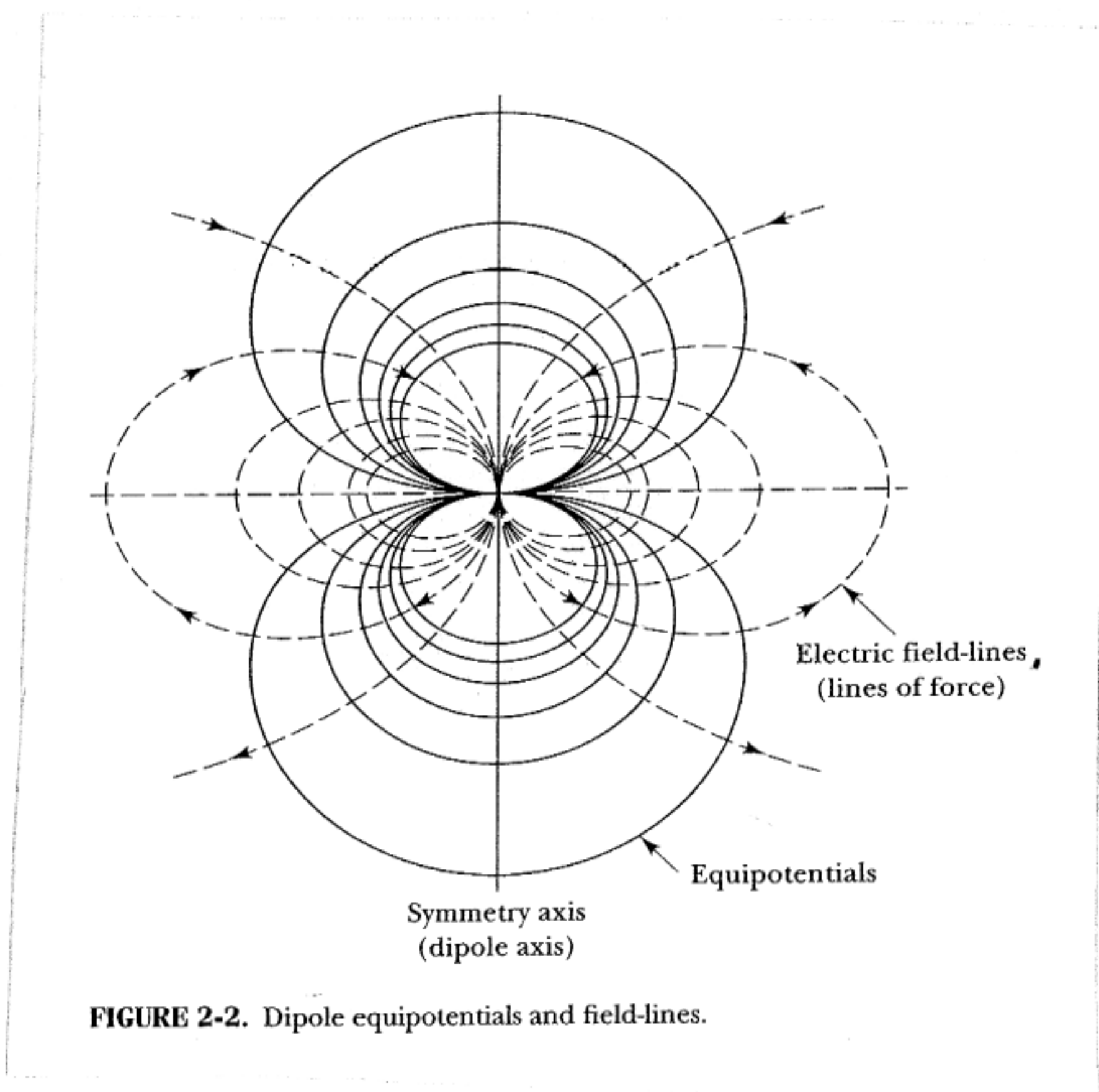
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{Q_{ij} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij})}{r^5} + \dots$$

Allgemein hat man eine Entwicklung nach
Spurlosen Tensoren (\rightarrow Theorie der harmonischen
Polynome)

Beachte, dass man anstatt $y_i y_j$ in Quadrupol-
tensor $y_i y_j - \frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \delta_{ij}$ schreiben kann, da

$$\frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \delta_{ij} (3x_i x_j - r^2 \delta_{ij}) = \frac{1}{3} |\vec{y}|^2 \left(3 \frac{x_i x_i}{r^2} - r^2 \delta_{ii} \right) = 0$$

Elektrischer Dipol



$$\left. \begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial\Phi}{\partial r} = 2p \frac{\cos\theta}{r^3} \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = p \frac{\sin\theta}{r^3} \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Elektrischer Quadrupol

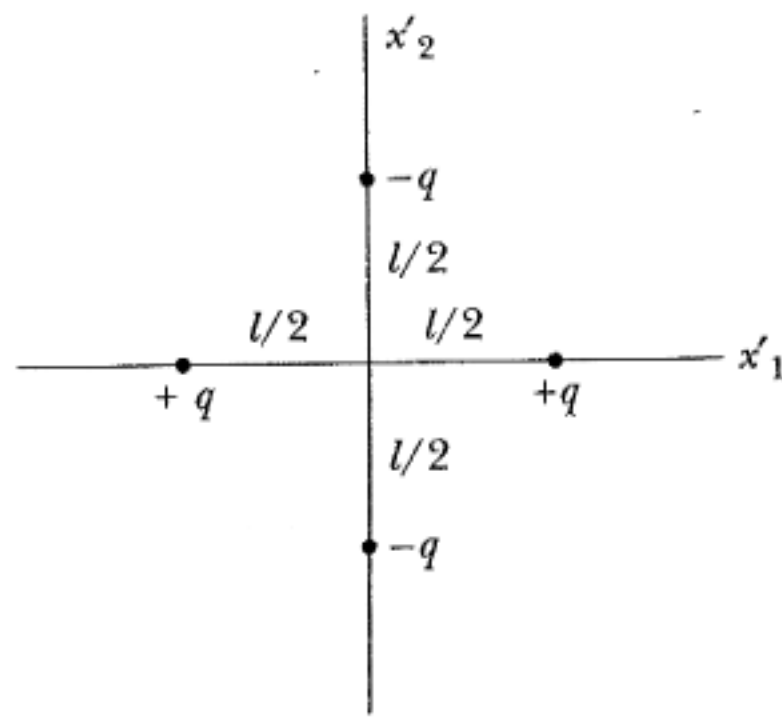


FIGURE 2-6. A square quadrupole.

where $\varphi = 0$ along the positive x_1 axis. The potential in the x_1 - x_2 plane ($\theta = \pi/2$) is shown in Fig. 2-7; again there are both positive and negative portions of the potential.

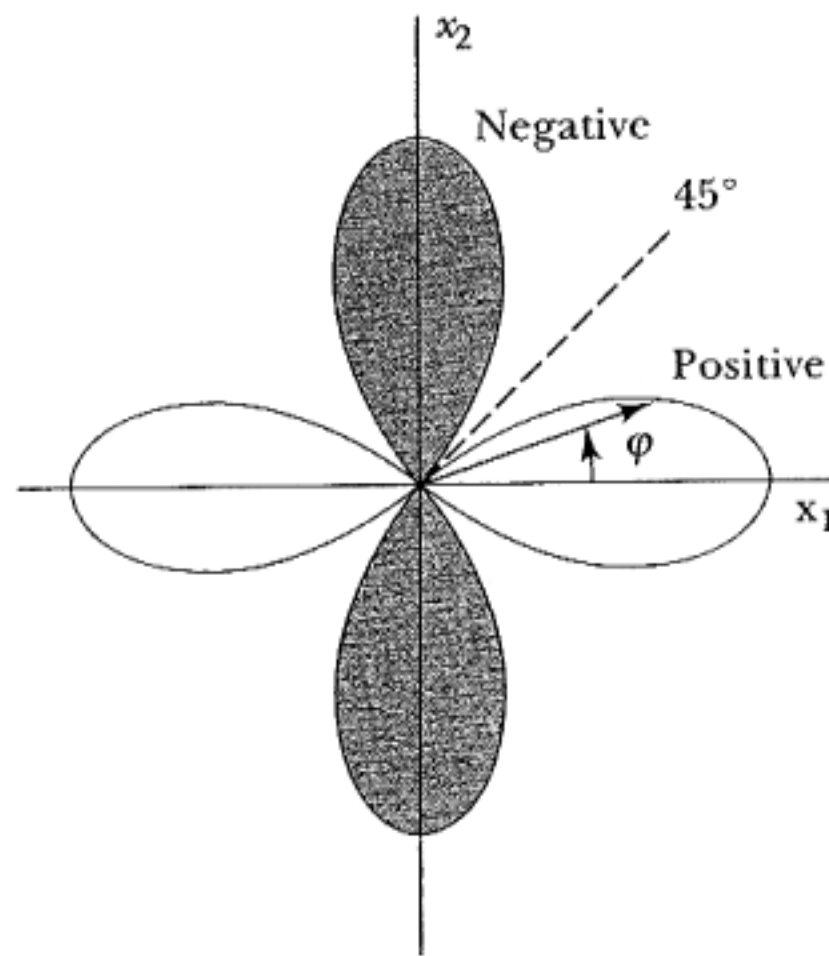
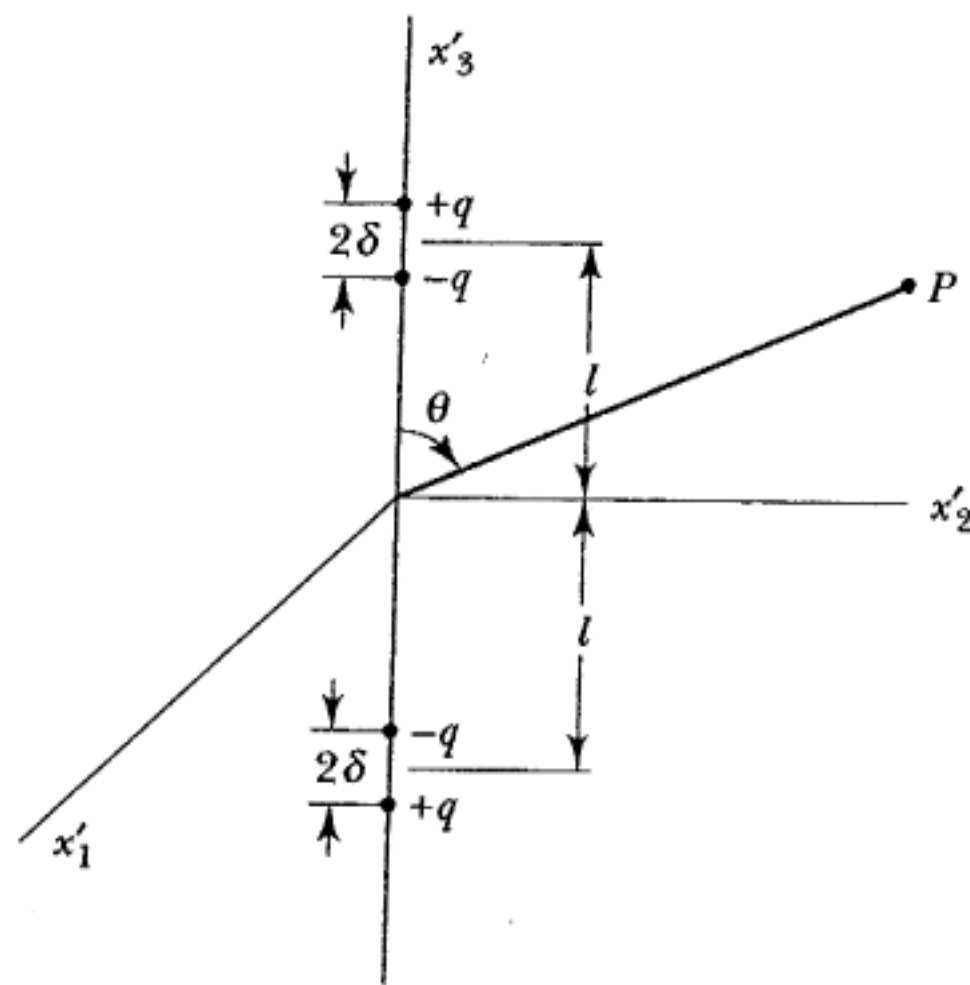


FIGURE 2-7. Polar plot of potential.

$$\phi = \frac{3}{4} q l^2 \frac{1}{r^3} \sin^2 \theta \cos 2\varphi$$

Elektr. Quadrupol



$$Q_{11} = Q_{22} = -\frac{1}{2} Q_{33} = -4pl$$

FIGURE 2-4. An axial quadrupole.

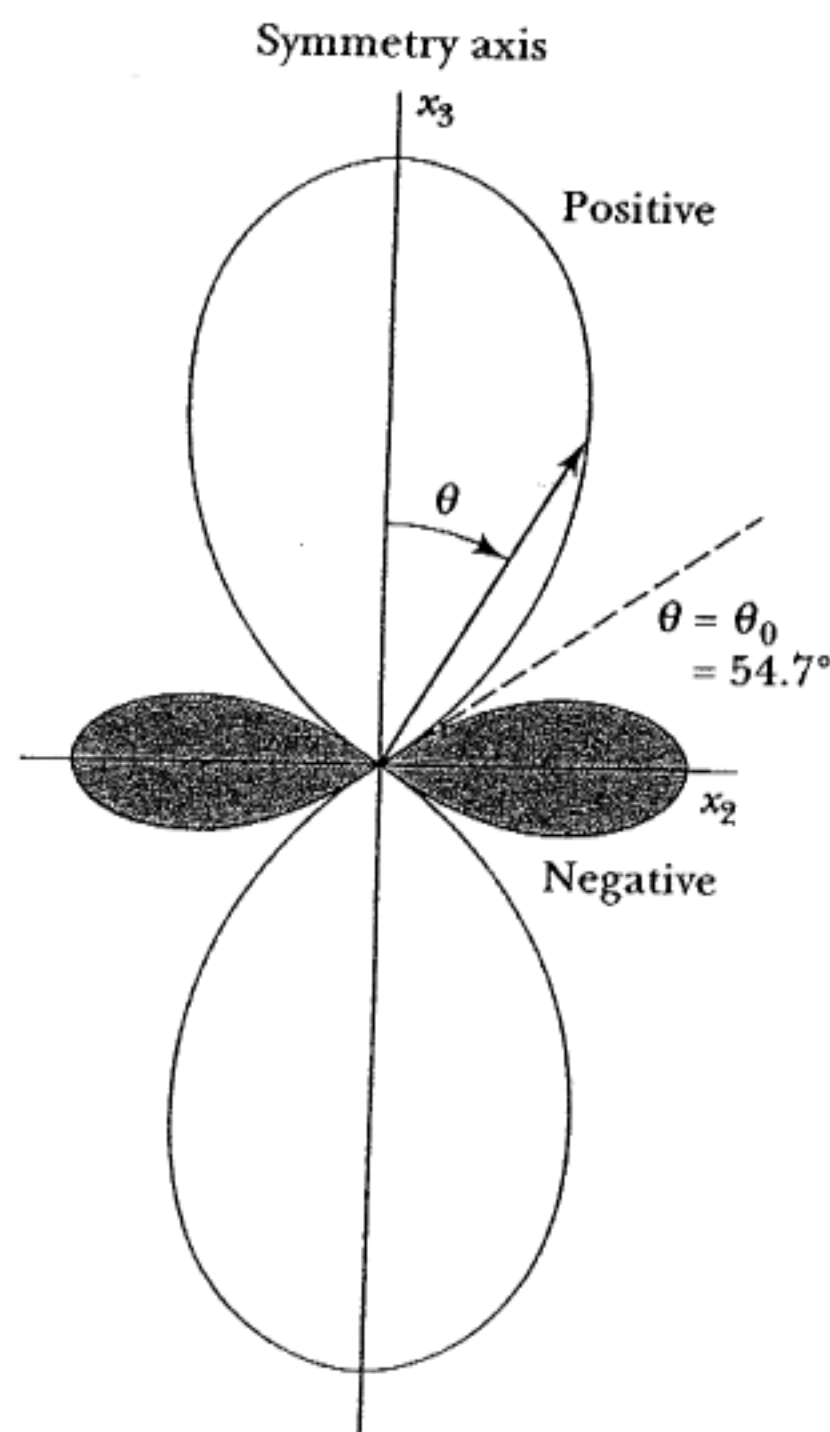


FIGURE 2-5. Polar plot of quadrupole potential.

$$\phi = 2pl \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{r^3}$$

Eine formale Entwicklung nach Multipolen findet man über Kugelflächenfunktionen

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{1}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \phi) q_{lm}$$

$$\text{wobei } q_{lm} = \int d^3\vec{x}' |\vec{x}'|^l Y_{lm}^*(\theta', \phi') \rho(\vec{x}')$$

die Multipolmomente der Ladungsverteilung sind.

$$\text{Es gilt } q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$$

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(\vec{y}) d^3y = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} Q$$

$$\begin{aligned} q_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int d^3y \rho(\vec{y}) |\vec{y}| \sin\theta (\cos\phi - i\sin\phi) \\ &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x - ip_y) \end{aligned}$$

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int d^3y \rho(\vec{y}) |\vec{y}| \cos\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} p_z$$

$$q_{1,-1} = -q_{11}^* = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (p_x + ip_y)$$

$l=1 \triangleq$ Dipol

Entsprechend erhält man auch $l=2$ die Quadrupolmomente.

(b) magnetische Multipole

Wir gehen von der Poissonformel für das Vektorpotential aus

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c} \int d^3\vec{x}' \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}$$

und führen wieder eine Taylorentwicklung von $|\vec{x} - \vec{x}'|^{-1}$ durch

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}) &= \frac{1}{c\tau} \int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') \\ &+ \frac{1}{c\tau^3} \int d^3\vec{x}' (\vec{x} \cdot \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') + \dots \end{aligned}$$

1. Term:

$$\begin{aligned} \int d^3\vec{x}' j_k(\vec{x}') &= \int d^3\vec{x}' \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_e}}_{= \delta_{ke} \text{ (Summenkonvention)}} j_e(\vec{x}') \\ &\stackrel{\text{p.F.}}{=} - \int d^3\vec{x}' x_k \underbrace{\frac{\partial j_e(\vec{x}')}{\partial x_e}}_{= \text{div}' \vec{j}(\vec{x}')} \\ &= - \partial_t \rho = 0 \quad \text{Kontinuitätsgl. stat. Fall} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Beachte, falls $\partial_t \rho \neq 0$ aber unmoduliert, d.h. $-\partial_t \rho = i\omega \rho$, dann

$$\int d^3\vec{x}' \vec{j}(\vec{x}') = -i\omega \int d^3\vec{x}' \vec{x}' \rho(\vec{x}') = -i\omega \vec{p}.$$

Das brauchen wir später noch!

2. Term

$$\frac{1}{2c} x_e \int d^3x' x'_e j_k(\vec{x}')$$

$$\frac{1}{2} \int \left([x'_e j_k + x'_k j_e] + [x'_e j_k - x'_k j_e] \right) d^3x'$$

Symmetrischer Anteil

$$\int (x'_e j_k + x'_k j_e) d^3x' =$$

$$= \int \left((\partial'_m x'_k) x'_e j_m + (\partial'_m x'_e) x'_k j_m \right) d^3x' =$$

$$\stackrel{\text{p. I.}}{=} - \int \left[x'_k (\delta_{em} j_m + x'_e \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}) + x'_e (\delta_{mk} j_m + x'_k (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j})) \right] d^3x'$$

$$= - \int (x'_k j_e + x'_e j_k) d^3x' - 2 \int x'_e x'_k (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}) d^3x'$$

$$\Rightarrow \int (x'_k j_e + x'_e j_k) d^3x' = - \int x'_e x'_k (\vec{\nabla}' \cdot \vec{j}) d^3x' \\ = - 10 \underbrace{\int x'_e x'_k \rho(\vec{x}') d^3x'}_{Q'_{ke}}$$

Anti-symmetrischer Anteil

$$\frac{1}{2c} \int d^3x' \left[(\vec{x} \vec{x}') \vec{j}(\vec{x}') - (\vec{x} \cdot \vec{j}(\vec{x}')) \vec{x}' \right]$$

$$= [\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}')] \times \vec{x}$$

$$= \vec{m} \times \vec{x}$$

wobei das magnetische Moment definiert
 ist als

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \int d^3\vec{x}' (\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}'))$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\vec{A}(\vec{x}) = -\frac{i\omega}{c} \frac{\vec{p}}{r} - \frac{i\omega}{r^3 c} \frac{1}{2} Q_{el} \vec{x} e$$

$$+ \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3}$$

wobei im statischen Fall nur der letzte
 Term vorhanden ist.

Daraus lässt sich nun leicht das magn.
 Feld eines Dipols berechnen

$$\vec{A} = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{r^3} = -\vec{m} \times \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

$$= \vec{\nabla} \frac{1}{r} \times \vec{m} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{m}}{r}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{rot rot } \frac{\vec{m}}{r}$$

$$= \text{grad div } \frac{\vec{m}}{r} - \Delta \frac{\vec{m}}{r}$$

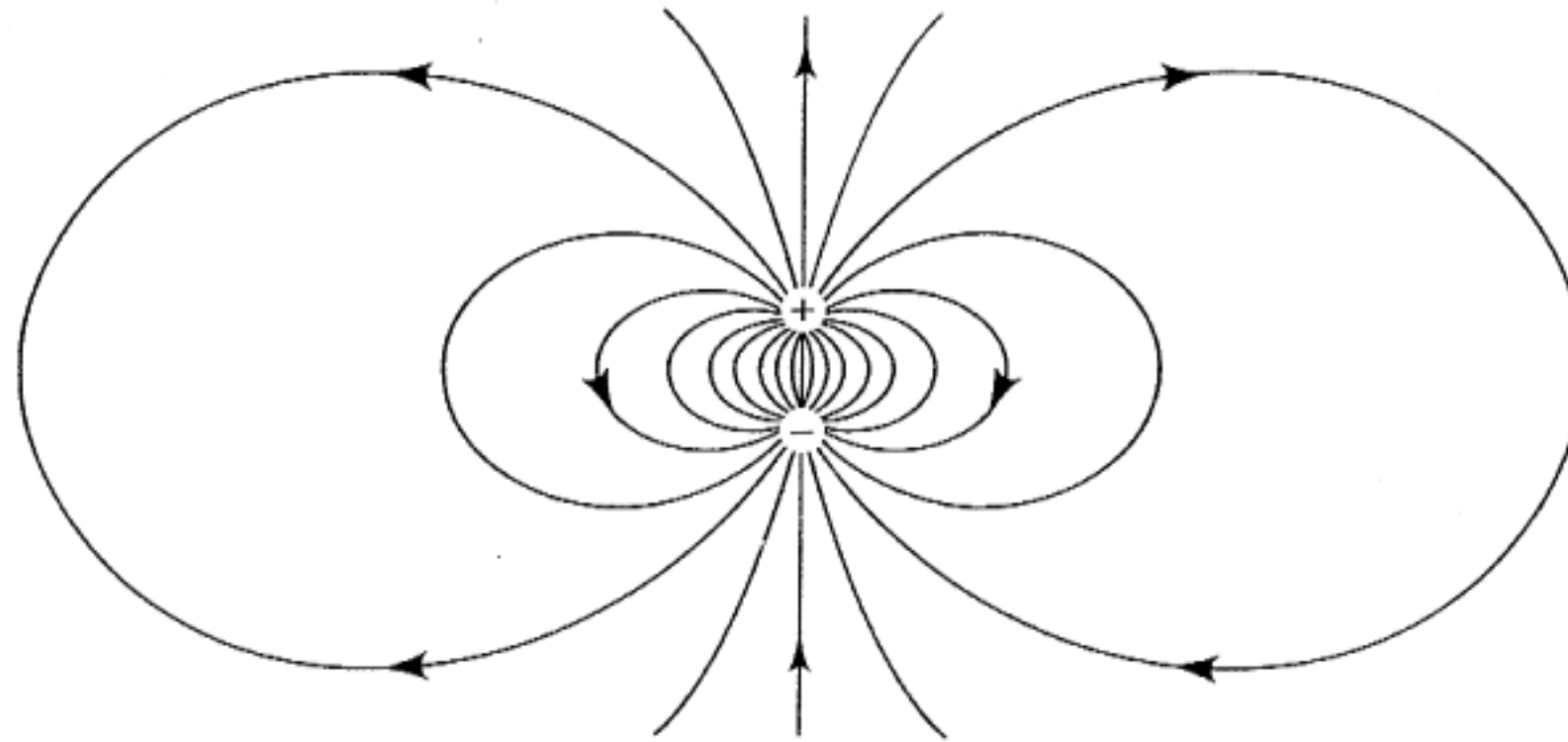
$$= -\text{grad } \frac{\vec{m} \cdot \vec{x}}{r^3} - \vec{m} \Delta \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r^5} [3(\vec{m} \cdot \vec{x}) \vec{x} - \vec{m} r^2]$$

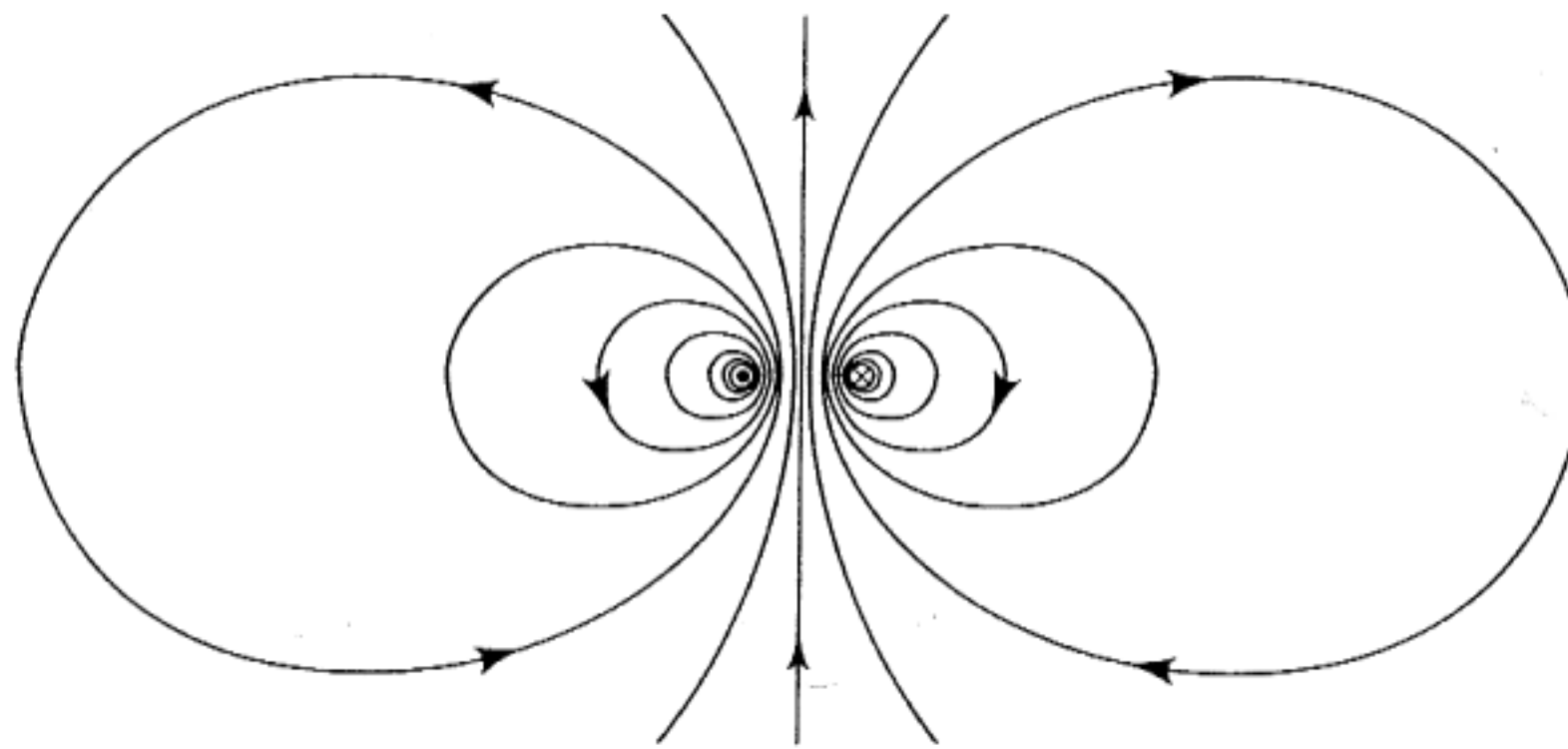
hat genau die gleiche Form wie ein
 elektrischer Dipol

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2\cos\theta \hat{e}_r + \sin\theta \hat{e}_\theta)$$

In both the electric and magnetic cases, Eqs. (2.28) and (2.63), we treated the limit where the structure size of the dipole is negligibly small—that is, it is their *external* fields that turn out to be identical. If we look *inside* the dipole structure, however, the fields are vastly different.* Typical examples are shown in Fig. 2-11. In both cases the internal fields are very strong—but the internal field of the electric (charge-pair) case is *opposite* to the dipole-moment vector, while that of the magnetic (current-loop) case is in the *same sense* as the moment.



(a) Electric (charge-pair) dipole



(b) Magnetic (current-loop) dipole

FIGURE 2-11. Field-lines of dipole models of finite size, showing identical external fields but oppositely directed internal fields. (Both diagrams are figures-of-revolution about the vertical axis.)

*There is a subtlety in properly representing the field *within* a “point” dipole. For some purposes it is necessary to add a delta-function to Eqs. (2.28) and (2.63), and the coefficient and sign of this term are *different* in the electric and magnetic cases. See Problem 2-19, and Jackson (Ja75, Eqs. 4.20 and 5.64). *Outside* the dipole, of course, this term is irrelevant. The similarities and differences between electric and magnetic dipoles are considered further in the following section. For further mathematical subtleties of point-source fields, see Bowen, *Am. J. Phys.* **62**, 511 (1994).

As Heald and Marion,
Classical Electromagnetic Radiation

7. Wellenabstrahlung

Zeitabhängige Quellen, z.B. beschleunigte Punktladungen, erzeugen elektromagnetische Wellen. Diese Kapitel behandelt die Eigenschaften dieser abgestrahlten elektrom. Wellen.

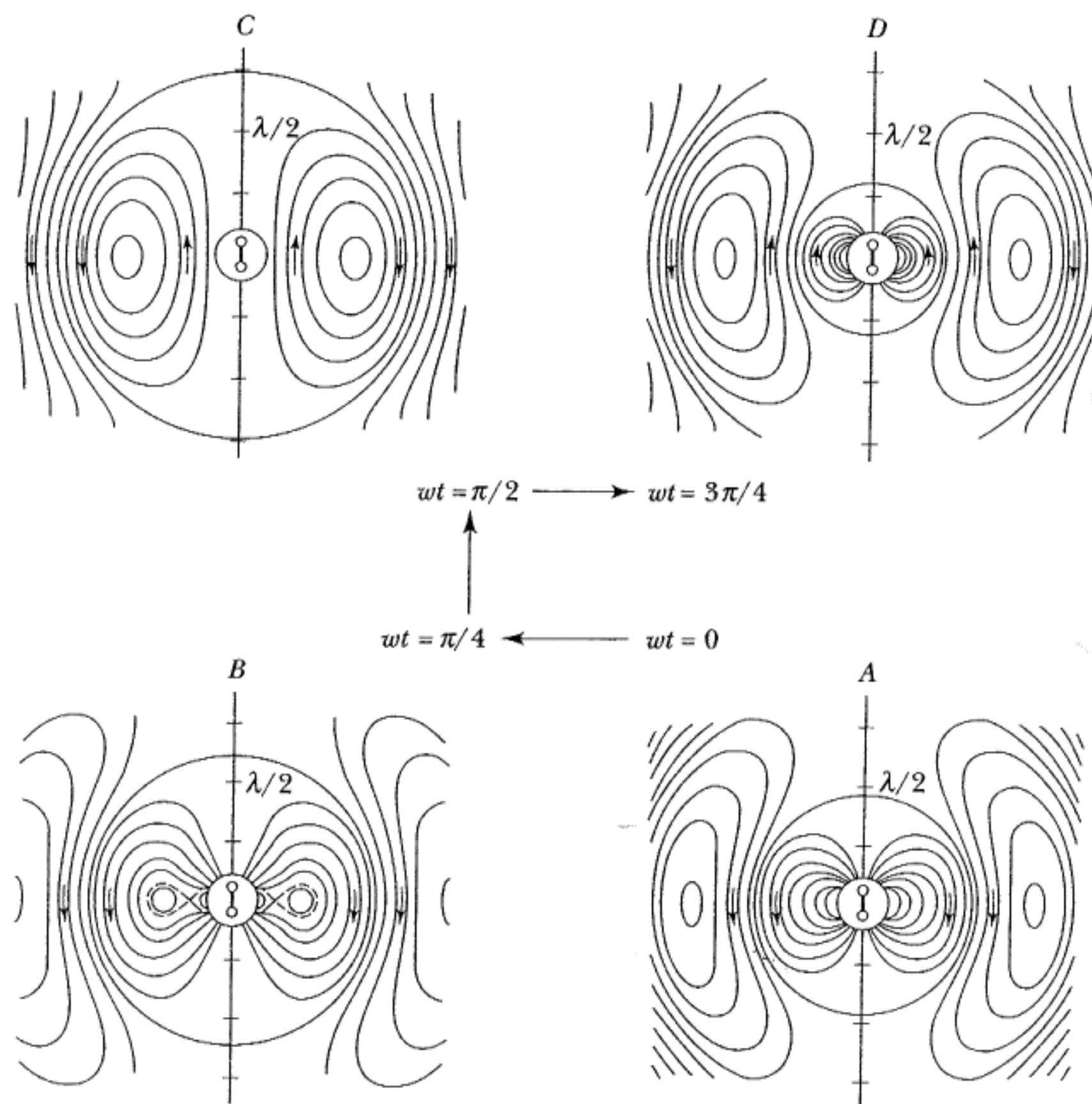


FIGURE 9-6. Snapshots of oscillating dipole. [From Hertz, *Wiedemann's Ann.* 36, 1 (1889); reprinted in (He62).]

Elektrische Feldlinien einer oszillierenden elektrischen Dipol. Aus Wiedemann's Ann. 36, 1 (1889)

7.1 Inhomogene Wellengleichung

Aus den homogenen Wellengleichungen lassen sich das skalare Potential φ und das Vektorpotential \vec{A} einführen

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \vec{A}$$

Die inhomogenen Maxwellgleichungen lauten

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi \rho$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Wir haben in Kapitel 6 die Lösungen dieser Gleichungen für statische Quellen studiert. Aus Kapitel 4 kennen wir allgemein die Lösung für freie Wellen ($\rho, \vec{j} = 0$). Hier verbleibt nun noch die Aufgabe eine spezielle Lösung für eine zeitlich veränderliche Ladungs- und Stromverteilung zu finden.

In Kapitel 2.3.3 haben wir gezeigt, daß in Lorenz Bedingung

$$\frac{1}{c} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

aus den inhomogenen Maxwellgleichungen folgt

$$\square \begin{pmatrix} \varphi \\ \vec{A} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} \rho c \\ \vec{j} \end{pmatrix}$$

7.2. Retardierte Potentiale

Die allgemeine Problemstellung besteht darin, Wellengleichungen der Form

$$-\square \chi(\vec{x}, t) = i(\vec{x}, t) \quad (*)$$

zu lösen. Wir suchen eine spezielle Lösung.

Fouriertransformation

$$\hat{\chi}(\vec{x}, \omega) = \int dt e^{+i\omega t} \chi(\vec{x}, t) = \chi^\omega(\vec{x}) \quad (\text{Notation})$$

$$\chi(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \hat{\chi}(\vec{x}, \omega)$$

Dann folgt aus (*),

$$\left(-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \Delta \right) \chi^\omega(\vec{x}) = i^\omega(\vec{x})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=:\gamma_0^2}$

Wir definieren

$$\gamma_0 = \pm i \frac{\omega}{c}$$

$$\gamma_\pm = \pm i \frac{\omega}{c} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

und betrachten die Gleichung

$$(\gamma_\pm^2 - \Delta) \chi^\omega(\vec{x}) = i^\omega(\vec{x})$$

Dies ist eine Helmholtz-Gleichung

An dem Anfang zu Kapitel 4 (Fourier-
trafo) wissen wir die Lösung der
Helmholtz - Gleichung

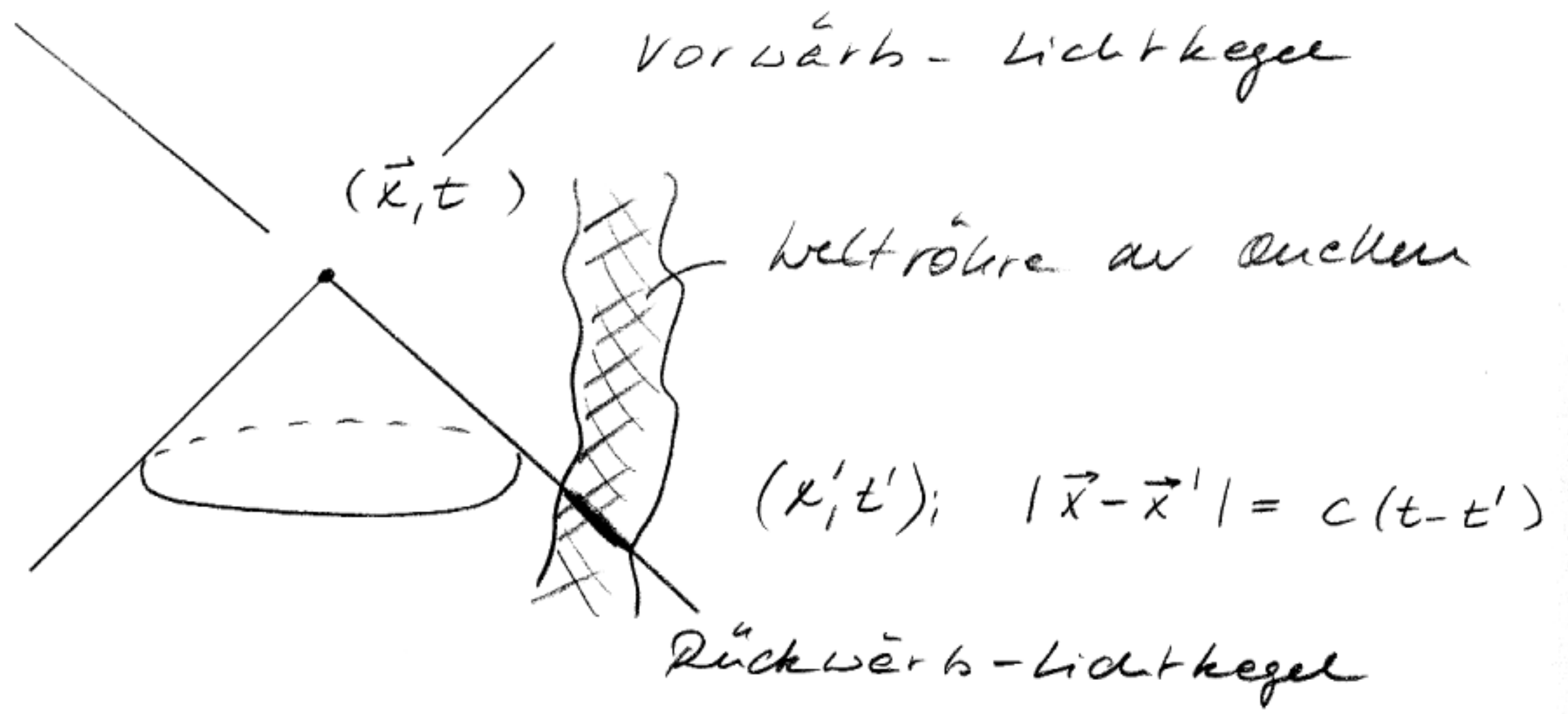
$$\begin{aligned} \chi_{\pm}^{\omega}(\vec{x}) &= \int d^3y \frac{e^{-\gamma_{\pm} |\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} i^{\omega}(\vec{y}) \\ &\stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \int d^3y \frac{e^{\mp i \frac{\omega}{c} |\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} i^{\omega}(\vec{y}) \end{aligned}$$

Dann folgt durch Fourier - Rücktrafo

$$\begin{aligned} \chi_{\pm}(\vec{x}, t) &= \int d^3y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c})} i^{\omega}(\vec{y}) \\ &= \int d^3y \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} i(\vec{y}, t \pm \frac{|\vec{x}-\vec{y}|}{c}) \end{aligned}$$

$\chi_{\pm}(\vec{x}, t)$ sind spezielle Lösungen
der inhomogenen Wellengleichung (*)

Für $c \rightarrow \infty$ reduziert sich der Ausdruck
auf den bereits bekannte Poisson Integral
für statische Potentiale; in diesem
Fall reduziert sich auch die Wellengl.
auf die Poissongl.



$\chi_{-}(\vec{x}, t) =$ Superposition von Coulombpotentialen über $\vec{x}' = \vec{y}$, wobei der Wert der Quelle zur Zeit $t_{-} = t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c}$ genommen wird.

→ retardierte Potential

bestimmen die Lösung der inhomogenen Wellengleichung am Raum-Zeit Punkt (\vec{x}, t) durch die Quellen auf dem Rückwärtslichtkegel: $i(\vec{y}, t - \frac{1}{c}|\vec{x} - \vec{y}|)$.

$\chi_{+}(\vec{x}, t) =$ avancierte Potential

bestimmt Potential bei (\vec{x}, t) aus Wert der Quellen auf dem Vorwärtskegel.

7.3. Nahzone und Fernzone

Wir leiten zunächst die inhomogenen Wellengleichungen für die elektromagnetischen und magnetischen Felder her

(i) Ampere-Maxwell Gesetz

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c} \partial_t \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j}$$

$$\underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}}_{=0}$$

$$= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

-Faraday'sche
Induktionsgesetz

$$\Rightarrow \boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2\right) \vec{B} = -\frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \vec{j}}$$

$$(ii) \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

$$= -\frac{1}{c} \partial_t \vec{B}$$

-Faraday

$$= 4\pi \rho$$

Coulomb

$$= -\frac{1}{c} \partial_t \operatorname{rot} \vec{B} \stackrel{\text{Ampere}}{=} -\frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} \right) \stackrel{\text{Maxwell}}{=}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E} = 4\pi \left(\nabla \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right)}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich nun gemäß der allgemeinen Überlegungen in den vorangegangenen Kapiteln die retardierten elektromagnetischen Felder ableiten.

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = - \int d^3y \frac{[\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j}]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3y \frac{[\text{nr } \vec{j}]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und nr auf \vec{y} wirken und $[\]_{\text{ret}}$ andeuten soll, daß das Argument der Funktionen in Klammern $(\vec{y}, t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}|)$ lautet.

Beachte, daß $[\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} \neq \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} &= \vec{\nabla} \rho(\vec{y}, t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}|) \\ &= [\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} - [\partial_t \rho]_{\text{ret}} \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}_{= -\frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}} \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } [\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} = \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} - \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{1}{c} [\partial_t \rho]_{\text{ret}}$$

Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left\{ -\vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} + \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\partial_t \rho]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2} [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} \right\}$$

oder, nach einer partiellen Integration im 1. Term

$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int d^3y \left\{ \frac{\vec{x} - \vec{y}}{ \vec{x} - \vec{y} ^3} [\rho]_{\text{ret}} + \left(\frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{ \vec{x} - \vec{y} ^2} [\partial_t \rho]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{ \vec{x} - \vec{y} } [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} \right) \right\}$	RETARDIERTES COULOMB FELD
---	------------------------------

STRAHLUNGSTERME $\sim \frac{1}{r}$
(= 0 im statischen Fall)

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = - \int d^3y \frac{[\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j}]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3y \frac{[\text{nr} \vec{j}]_{\text{ret}}}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

wobei $\vec{\nabla}$ und nr auf \vec{y} wirken und $[\]_{\text{ret}}$ andeuten soll, daß das Argument der Funktionen in Klammern ($\vec{y}, t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}|$) lautet.

Beachte, daß $[\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} \neq \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}}$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} &= \vec{\nabla} \rho(\vec{y}, t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}|) \\ &= [\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} - [\partial_t \rho]_{\text{ret}} \underbrace{\vec{\nabla} \left(\frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} \right)}_{= -\frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|}} \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } [\vec{\nabla} \rho]_{\text{ret}} = \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} - \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \frac{1}{c} [\partial_t \rho]_{\text{ret}}$$

Damit erhält man für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \left\{ - \vec{\nabla} [\rho]_{\text{ret}} + \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} [\partial_t \rho]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2} [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} \right\}$$

oder, nach einer partiellen Integration im 1. Term

$\vec{E}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = \int d^3y \left\{ \frac{\vec{x} - \vec{y}}{ \vec{x} - \vec{y} ^3} [\rho]_{\text{ret}} + \left(\frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{ \vec{x} - \vec{y} ^2} [\partial_t \rho]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{ \vec{x} - \vec{y} } [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} \right) \right\}$	RETARDIERTES COULOMB FELD
---	------------------------------

STRAHLUNGSTERME $\sim \frac{1}{r}$
(= 0 im statischen Fall)

Analog findet man unter Verwendung von

$$\vec{\nabla} \times [\vec{j}]_{\text{ret}} = [\vec{\nabla} \times \vec{j}]_{\text{ret}} + \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|} \times [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}}$$

für das retardierte magnetische Feld

$$\vec{B}_{\text{ret}}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{c} \int d^3y \left\{ \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^3} \times [\vec{j}]_{\text{ret}} \quad \begin{array}{l} \text{BIOT} \\ \text{SAVART} \\ \text{TERM} \end{array} \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \frac{\vec{x} - \vec{y}}{|\vec{x} - \vec{y}|^2} \times [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} \right\}$$

$$\text{STRAHLUNGSTERM} \sim \frac{1}{r}$$

Um nur eine heuristische Vorstellung von den verschiedenen Termen zu machen betrachten

wir sinusförmige zeitabhängigkeiten $\sim e^{-i\omega t}$.

Dann erhält man für das Verhältnis der beiden Terme in \vec{B}_{ret}

$$\frac{\text{Strahlung}}{\text{Biot-Savart}} \sim \frac{\partial_t j}{rc} / \frac{j}{r^2} \sim \frac{\omega}{c} r \sim \frac{r}{\lambda}$$

wobei $r = |\vec{x} - \vec{y}|$ der Abstand zwischen Quelle und Aufpunkt ist.

Für große Wellenlängen λ (kleine Frequenzen ω) dominiert der Biot-Savart Anteil bis zu großen Abständen von der Quelle. Erst für $r \gg \lambda$ dominiert der Strahlungsterm.

Entsprechende Aussagen gelten auch für das elektrische Feld!

Wir führen folgende Terminologie ein:

Nahzone: $r \ll \lambda$
Fernzone: $r \gg \lambda$
(auch Wellenzone)

— In folgenden Abschnitten wir die Felder in der Fernzone, (Für Nahzone siehe 6.3.)

Sei d die Ausdehnung der Quelle. Wir betrachten

$$r \gg \lambda \quad \text{und} \quad r \gg d$$

Dann gilt für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{\text{rer}} = \frac{1}{r} \int d^3y \left\{ \frac{1}{c} [\partial_t \rho]_{\text{rer}} \vec{n} - \frac{1}{c^2} [\partial_t \vec{j}]_{\text{rer}} \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

wobei $\vec{n} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$ und $r = |\vec{x}|$

Wir verwenden nun den Ladungserhaltungssatz

$$[\partial_t \rho]_{\text{rer}} = -[\vec{\nabla} \cdot \vec{j}]_{\text{rer}} \approx -\vec{\nabla} \cdot [\vec{j}]_{\text{rer}} + \frac{1}{c} \vec{n} [\partial_t \vec{j}]_{\text{rer}}$$

und vernachlässigen die Divergenzterme auf der rechten Seite, da er $\sim \frac{1}{r}$ ist.

$$\vec{E}_{\text{rer}} = \frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \int d^3y \left\{ (\vec{n} [\partial_t \vec{j}]_{\text{rer}}) \cdot \vec{n} - [\partial_t \vec{j}] \right\} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Analog (noch einfacher) findet man

$$\vec{B}_{\text{ret}} = -\frac{1}{r} \frac{1}{c^2} \int d^3y \vec{n} \times [\partial_t \vec{j}]_{\text{ret}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

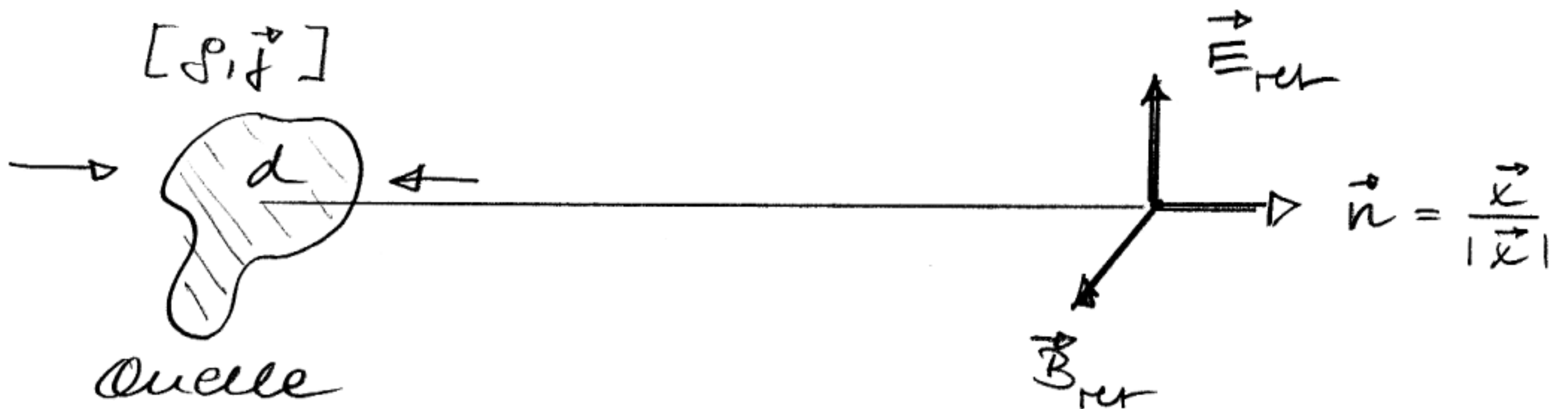
Wir definieren

$$\vec{J} := \int d^3y [\vec{j}]_{\text{ret}} = \int d^3y \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}|)$$

und beben damit als führende Terme

$$\left. \begin{aligned} \vec{E}_{\text{ret}} &= \frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{J}}) \\ \vec{B}_{\text{ret}} &= -\frac{1}{c^2} \frac{1}{r} \vec{n} \times \dot{\vec{J}} \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\Rightarrow \vec{B}_{\text{ret}} \times \vec{n} = \vec{E}_{\text{ret}}$$



Die retardierten Felder sind lokal ebene Wellen.

In hinreichend großen Abständen r der Quelle kann man auch t_{ret} in der Quelle \vec{J} entwickeln^{*})

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{rc}\right)$$

wobei der Entwicklungsparameter $\frac{d}{r}$ ist. Damit man den Term d^2/rc vernachlässigen darf, sollte sich \vec{J} in der Zeit d/rc nur wenig ändern, im zeitlich harmonischen Fall läuft das

$$\text{w. } \frac{d^2}{rc} \sim \frac{d^2}{r\lambda} \ll 1 \quad (*)$$

Fall $\lambda \gg d$, dann ist diese Relation automatisch erfüllt, denn dann folgt aus $\tau \gg \lambda$, $\lambda \gg \frac{d^2}{\lambda^2} \lambda$ die Beziehung $\tau \gg (d/\lambda)^2 \lambda$

Ist hingegen $\lambda \lesssim d$ dann ist (*) nicht im ganzen Frequenzgebiet erfüllt, sicher aber für hinreichend große Abstände.

Wir setzen in folgendem

$$\vec{J} = \int d^3y \vec{J}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} *) \quad \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{y}| &= \frac{1}{c} |\vec{x}| \left| \vec{n} - \frac{\vec{y}}{r} \right| = \\ \frac{r}{c} \sqrt{(\vec{n} - \frac{\vec{y}}{r})^2} &= \frac{r}{c} - \frac{r \vec{y} \cdot \vec{n}}{c r} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{rc}\right) \end{aligned}$$

Wir diskutieren nun die Konsequenzen aus den Gleichungen (1) und (2):

Dazu stellen wir $\vec{f}(\vec{x}, t)$ als Fourierintegral dar

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \vec{f}(\vec{x}, \omega)$$

Dann gilt dann

$$\begin{aligned} \vec{f}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int d^3y e^{-i\omega \left[t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} \right]} \vec{f}(\vec{y}, \omega) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega \left[t - \frac{r}{c} \right]} \int d^3y e^{-i\vec{k} \cdot \vec{y}} \vec{f}(\vec{y}, \omega) \end{aligned}$$

wobei $\vec{k} := \frac{\omega}{c} \vec{n}$ Wellenvektor

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{f}(\vec{k}, \omega)$$

Also

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \vec{f}(\vec{k}, \omega)$$

wobei $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$ (!)

Im monochromatischen Fall gilt

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{j}(\vec{x}) e^{-i\omega t}]$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \text{Re}[\vec{j}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)}]$$

wobei $\vec{j}(\vec{k}) = \text{FT}[\vec{j}(\vec{x})]$ ist.

Der zeitlich gemittelte Poynting Vektor ist dann

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} \langle \vec{B}^2 \rangle \vec{n}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \frac{c}{4\pi} \left(\frac{1}{c^2}\right)^2 \frac{1}{r^2} \underbrace{\langle |\vec{n} \times \vec{j}|^2 \rangle}_{\frac{1}{2} |\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k})|^2} \omega^2 \vec{n}$$

\uparrow
 $\langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{r^2} \frac{1}{8\pi c^3} |\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k})|^2 \omega^2 \vec{n}$$

Bezeichnet man mit $d\bar{I} = \frac{d\bar{I}}{d\Omega} d\Omega$ die zeitlich gemittelte abgetragene Energie pro Zeiteinheit in dem Raumwinkel element $d\Omega$, so ist

$$\frac{d\bar{I}}{d\Omega} = \langle \vec{S} \rangle r^2 \vec{n} d\Omega / d\Omega$$

$$= \frac{\omega^2}{8\pi c^3} |\vec{n} \times \vec{j}(\vec{k})|^2$$

mit $\vec{j}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\vec{x}} \vec{j}(\vec{x})$; $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}$

Multipolentwicklung / Longwellerentwicklung

Wir wollen nun zusätzlich annehmen,

das gilt
 $\boxed{L \gg d} \quad (*)$

Dann gilt, wie bereits gezeigt, $\frac{d^2}{rL} \ll 1$

Wenn $(*)$ gilt, dann ist die relative zeitliche Änderung von \vec{j} und ρ auch klein in der Zeit $\frac{d}{c}$, die das Licht benötigt, um die Quelle zu durchqueren; mit anderen Worten: die Retardierung innerhalb der Quelle ist ein kleiner Effekt.

Wir entwickeln daher \vec{A}

$$\vec{A} = \int d^3y \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c})$$

$$\approx \int d^3y \left[\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} \partial_t \vec{j}(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \right]$$

1. Term

$$\int d^3y j_e(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) = \int d^3y \overbrace{\frac{\partial y_e}{\partial y_m}}^{\delta_{em}} j_m(\vec{y}, t - \frac{r}{c})$$

$$\stackrel{\text{p.f.}}{=} - \int d^3y y_e \frac{\partial}{\partial y_m} j_m(\vec{y}, t - \frac{r}{c})$$

$$\stackrel{\text{Kont. gl.}}{=} + \int d^3y y_e \partial_t \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) = \left[\partial_t \vec{P}(t - \frac{r}{c}) \right]_e$$

wobei $\vec{P}(t) = \int d^3y \vec{y} \rho(\vec{y}, t)$ Dipolmoment

2. Term

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int d^3y n_e y_e \partial_t j_m(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) &= \\ &= \frac{1}{2c} n_e \int d^3y (y_e \partial_t j_m + y_m \partial_t j_e) \\ &+ \frac{1}{2c} n_e \int d^3y (y_e \partial_t j_m - y_m \partial_t j_e) \\ &\equiv \frac{1}{2c} n_e (\ddot{\Gamma}_{em} + 2c \mu_{em}) \end{aligned}$$

Wobei

$$\Gamma_{em} = \int d^3y \rho(\vec{y}) y_e y_m$$

$$\mu_{em} = \frac{1}{2c} \int (y_e j_m - y_m j_e)$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_{em}(t) &= \int d^3y \dot{\rho}(\vec{y}, t) y_e y_m = \\ &= \int d^3y (-\operatorname{div} \vec{j}) y_e y_m = \\ &= \int d^3y (j_e y_m + j_m y_e) \end{aligned}$$

Tusgeamt findet man also

$\vec{j}_m = \dot{P}_m(t - \frac{r}{c}) + \mu_{em}(t - \frac{r}{c}) n_e + \frac{1}{2c} \ddot{\Gamma}_{em}(t - \frac{r}{c}) n_e$		
elektr. Dipol	magn. Dipol	elektr. Quadrupol

unter Verwendung des magnetischen Moments

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int d^3y \vec{y} \times \vec{j}$$

für die Stromverteilung \vec{j} , können wir die Dipolanteile wie folgt schreiben

$$\vec{j}_{\text{Dipol}} = \dot{\vec{P}}(t - \frac{r}{c}) + \dot{\vec{\mu}}(t - \frac{r}{c}) \times \vec{n}$$

In elektrischen Quadrupolanteil darf man \vec{T}_{em} durch den Quadrupoltensor ersetzen

$$Q_{em} = \vec{T}_{em} - \frac{1}{3} \delta_{em} \vec{T}_{kk}$$

denn die abgezogene Spur gibt für \vec{j} einen Beitrag proportional zu \vec{n} , der in der Feldstärke wegen der Kreuzprodukte nicht beiträgt.

Dann gibt insgesamt

$$\vec{B} = \frac{1}{rc^2} \left[\ddot{\vec{P}} \times \vec{n} + (\ddot{\vec{\mu}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \frac{1}{2c} (\dddot{Q} \vec{n}) \times \vec{n} \right]_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{rc^2} \left[(\ddot{\vec{P}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \vec{n} \times \ddot{\vec{\mu}} + \frac{1}{2c} ((\dddot{Q} \vec{n}) \times \vec{n}) \times \vec{n} \right]_{\text{ret}}$$

Die magnetische Dipolstrahlung geht aus der elektrischen durch die Substitution

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B}; \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E}, \quad \vec{P} \rightarrow \mu$$

hervor.

Austrahlung

Der Poynting vektor lautet

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2 \vec{n}$$
$$= \frac{c}{4\pi} |\vec{B}|^2 \vec{n}$$

Die Intensität der abgestrahlten Energie pro Raumwinkel ist

$$\frac{dI}{d\Omega} = |\vec{S}| \cdot r^2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi c^3} \left| \left[\ddot{\vec{p}} \times \vec{n} + (\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}) \times \vec{n} + \frac{1}{2c} (\ddot{\vec{q}} \times \vec{n}) \right]_{\text{rer}} \right|^2$$

Betrachte den Fall, daß die elektrischen Dipolfelder dominieren. Dann ist

$$\left(\frac{dI}{d\Omega} \right)_{\text{el. Dip.}} = \frac{1}{4\pi c^3} |\ddot{\vec{p}} \times \vec{n}|^2 =$$
$$= \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{p}^2 \sin^2 \vartheta$$

wobei $\vartheta = \angle(\ddot{\vec{p}}, \vec{n})$

Integriert man über alle Raumrichtungen so ergibt sich die Intensität

$$\boxed{\frac{I}{\text{el. Dip.}} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{p}}|^2}$$

Für magnetische Dipolstrahlung muß man nur \vec{p} durch $\vec{\mu}$ ersetzen

$$\frac{dI}{d\Omega} \Big|_{\text{mag. Dip}} = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\vec{\mu}}|^2$$

Wir betrachten nun die elektrische Quadrupolstrahlung. Es gilt

$$\left(\vec{B}^{\text{quad}}\right)_i = \frac{1}{25c^3} \epsilon_{ijk} \ddot{Q}_{je} n_e n_k$$

Die zugehörige differentielle Intensität ist

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4c^6} \epsilon_{ijk} \ddot{Q}_{je} n_e n_k \epsilon_{irs} \ddot{Q}_{rm} n_m n_s$$

$$\uparrow = \frac{1}{16\pi c^5} \left[\ddot{Q}_{je} \ddot{Q}_{jm} n_e n_m - \ddot{Q}_{je} \ddot{Q}_{km} n_e n_k n_m \right]$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{irs} = \delta_{jr} \delta_{ks} - \delta_{js} \delta_{kr}$$

Für die Integration über alle Richtungen benötigt man folgende (leicht zu zeigen) Formeln für Integration über die Oberfläche der Einheitskugel S^2

$$\int_{S^2} n_e n_m d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{em}$$

$$\int_{S^2} n_j n_e n_k n_m d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{je} \delta_{km} + \delta_{jk} \delta_{em} + \delta_{jm} \delta_{ek})$$

Damit findet man
(beide $Q_{kk} = 0$)

$$\boxed{\frac{\dot{\Gamma}}{d. \text{quad}} = \frac{1}{20c^5} \sum_{l,k} \ddot{Q}_{ke} \ddot{Q}_{ke}}$$

Interpretiert man den Gesamt Ausdruck für die abgestrahlte Leistung über alle Richtungen, so verwendet man die Kreuzterme der verschiedenen Multipole und man findet einfach die Summe der oben abgeleiteten Terme

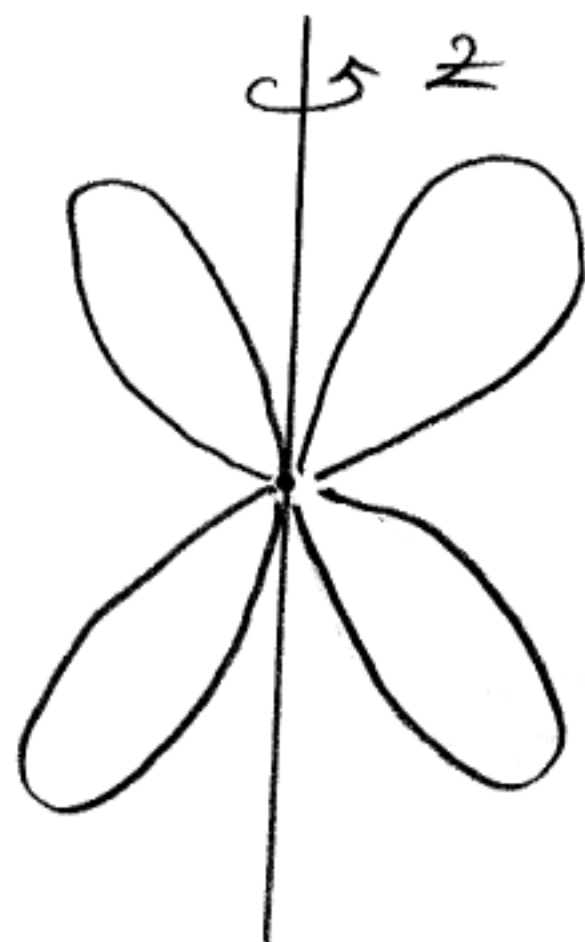
$$\boxed{\dot{\Gamma} = \frac{2}{3c^2} \left(|\dot{\vec{p}}|^2 + |\dot{\vec{\mu}}|^2 \right) + \frac{1}{20c^5} \sum_{kl} \ddot{Q}_{ke} \ddot{Q}_{ke}}$$

Beispiel für Quadrupolstrahlung

$$Q = \text{diag} \left(-\frac{1}{2} Q_0, -\frac{1}{2} Q_0, Q_0 \right)$$

$\hat{=}$ eine z-Achse vor. sym. Ladungsverteilung

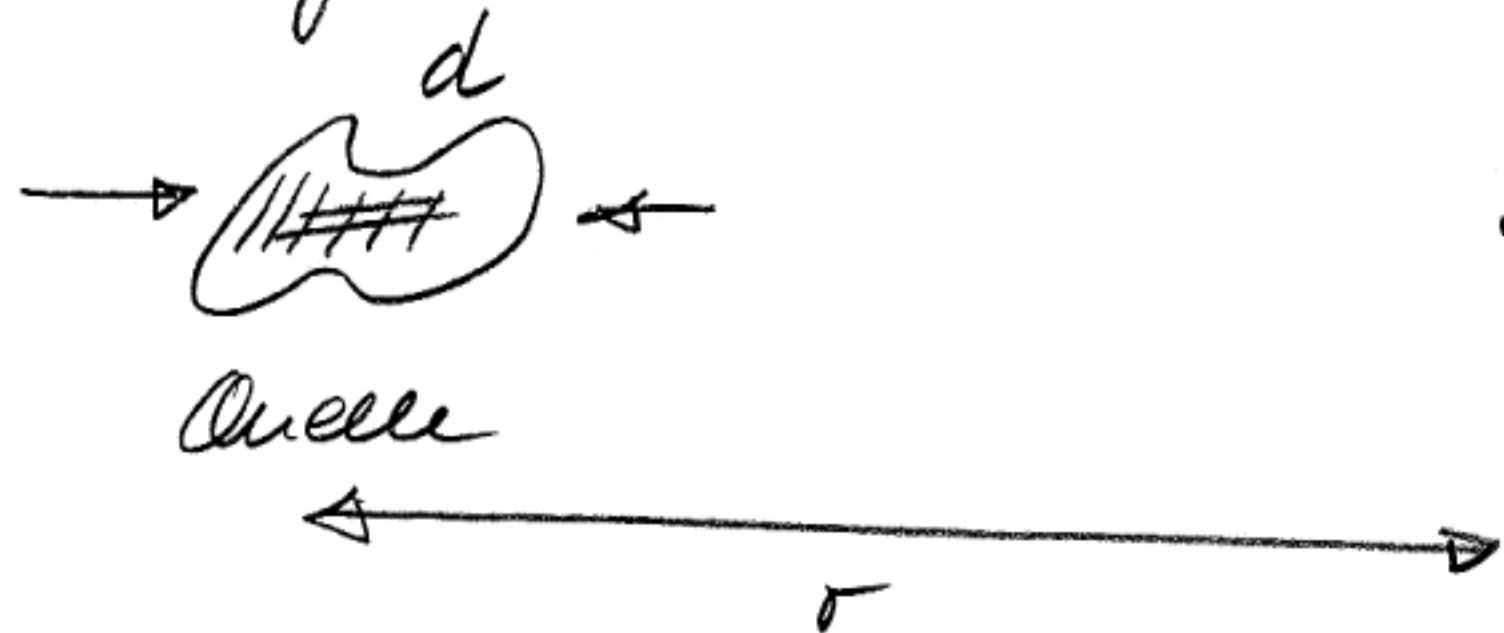
$$\frac{d\dot{\Gamma}}{d\Omega} = \frac{9}{4\pi c^5} \left(\ddot{Q}_0 \right)^2 \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta$$



→ Anwendung für Radiopulsare

7.4. Der Hertz'sche Dipol

Ziel dieses Kapitels ist die Analyse der von kleinen Ladungs- und Stromverteilungen erzeugten elem. Felder



$$r \gg d \quad \text{und} \quad l \gg d$$

Die Beziehung zwischen r und l wird nicht eingezeichnet.

Man könnte als Ausgangspunkt die bereits gefundenen Lösungen für die retardierte elektrische und magnetische Felder nehmen. Die Rechnungen sind jedoch viel einfacher wenn man sie in skalarem Potential φ und Vektorpotential \vec{A} formuliert.

In Lorentzbedingung lauten die retardierten Lösungen der Wellengleichungen

$$\varphi(\vec{x}, t) = \int d^3y \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3y \frac{\vec{j}(\vec{y}, t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c})}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

Aufgrund der Annahme $r \gg d$
 dürfen wir wieder entwickeln

$$\begin{aligned}
 t_{ret} &= t - \frac{|\vec{x} - \vec{y}|}{c} = \\
 &\approx t - \frac{|\vec{x}|}{c} + \vec{y} \cdot \frac{1}{c} \vec{\nabla} |\vec{x} - \vec{y}| \Big|_{\vec{y}=0} + \dots \\
 &= t - \frac{r}{c} + \frac{1}{c} \vec{y} \cdot \vec{x} \frac{1}{|\vec{x}|} + \dots \\
 &\approx t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}
 \end{aligned}$$

Damit erhält man mit $d \ll r$ ($\approx \frac{d^2}{r^2} \ll 1$)

$$\begin{aligned}
 [\rho]_{ret} &\approx \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c}) \\
 &\approx \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{c} \partial_t \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c})
 \end{aligned}$$

Wir entwickeln nun den Integranden bis
 zur ersten Ordnung in $\frac{d}{r}$ und $\frac{d}{c} \partial_t$

$$\begin{aligned}
 \frac{[\rho]_{ret}}{|\vec{x} - \vec{y}|} &= \frac{\rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c})}{r} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r^2} \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) \\
 &\quad + \frac{1}{c} \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r} \partial_t \rho(\vec{y}, t - \frac{r}{c}) + \dots
 \end{aligned}$$

Bezeichnen Q die Gesamtladung und
 \vec{P} das Dipolmoment der Ladungsverteilung,
 so findet man für das skalare Potential

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{Q}{r} + \frac{1}{r^2} \vec{n} \cdot \vec{P}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{cr} \vec{n} \cdot \dot{\vec{P}}(t - \frac{r}{c})$$

(für $r \gg d$ und $r \gg d$)

Für die Berechnung des Vektorpotentials gilt

$$\frac{[\vec{j}]_{\text{ret}}}{|\vec{x}-\vec{y}|} = \frac{\vec{j}(\vec{y}, t-\frac{r}{c})}{r} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r^2} \vec{j}(\vec{y}, t-\frac{r}{c}) + \frac{1}{c} \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r} \partial_t \vec{j}(\vec{y}, t-\frac{r}{c}) + \dots$$

Bei der Umformung der benötigten Integrale verwendet man 2 Identitäten

$$0 = \int d^3y \partial_e (y_k j_e) = \int d^3y [j_k + y_k \underbrace{\partial_e j_e}_{= -\partial_t \rho}]$$

↑
Strom nur auf endlichem Raumgebiet bedrückt

$$\oint y_k j_e d^3e = 0$$

$$\Rightarrow \int d^3y \vec{j} = \partial_t \vec{P} \quad (a)$$

$$0 = \int \partial_e (y_k y_s j_e) d^3y = \int (j_k y_s + j_s y_k + y_k y_s \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{j}}_{= -\partial_t \rho}) d^3y$$

$$\Rightarrow \int j_k y_s d^3y = - \int j_s y_k d^3y + \int \dot{\rho} y_k y_s d^3y$$

Multipliziert man nun einen konstanten Vektor \vec{a} , so findet man

$$\int d^3y (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{j} = - \int d^3y \vec{y} (\vec{a} \cdot \vec{j}) + \int d^3y \vec{y} (\vec{a} \cdot \vec{y}) \dot{\rho} \quad (b)$$

In vorliegendem Fall darf man den letzten Term in (6) weglassen, da er von der Ordnung d^2/r^2 , also Quadratordnung, ist.

Dann

$$\begin{aligned} \int (\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{j} d^3y &= \frac{1}{2} \int [(\vec{a} \cdot \vec{y}) \vec{j} - (\vec{a} \cdot \vec{j}) \vec{a}] d^3y \\ &= -\frac{1}{2} \int \vec{a} \times (\vec{y} \times \vec{j}) d^3y \quad (6)' \end{aligned}$$

Hier \vec{j} bezeichnen wir wieder als magn. Moment der Stromverteilung. Dann findet man

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{c r} \dot{\vec{p}}(t - r/c) - \frac{1}{r^2} \vec{n} \times \vec{\mu}(t - r/c) \\ &\quad - \frac{1}{c r} \vec{n} \times \dot{\vec{\mu}}(t - r/c) \end{aligned}$$

Es sollen nun die Felder für den Spezialfall betrachtet werden, dass $Q = 0$ und \vec{p} verhältnismäßig klein sein kann. Man spricht dann vom Hertz'schen Dipol.

Dann ist

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{r^2} \vec{n} \cdot \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{rc} \vec{n} \cdot \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{cr} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

oder

$$\varphi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{\xi}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{c} \dot{\vec{\xi}}$$

wobei $\vec{\xi} = \frac{1}{r} \vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)$

Der sogenannte Hertz'sche Vektor ist. Für die Felder findet man

$$\vec{B} = -\vec{n} \times \left[\frac{1}{c^2 r} \ddot{\vec{p}} + \frac{1}{cr^2} \dot{\vec{p}} \right]_{\text{ret}}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{c^2 r} \left[(\ddot{\vec{p}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \ddot{\vec{p}} \right]_{\text{ret}}$$

$$+ \frac{1}{cr^2} \left[3(\dot{\vec{p}} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \dot{\vec{p}} \right]_{\text{ret}}$$

$$+ \frac{1}{r^3} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{n}) \vec{n} - \vec{p} \right]_{\text{ret}}$$

wobei überall auf der rechten Seite in \vec{p} , $\dot{\vec{p}}$ und $\ddot{\vec{p}}$ die retardierten Zeiten zu nehmen sind.

Bemerkung: Anstelle einer elektr. Hertz'schen
 Oszillation könnte man auch einen magnet.
 betrachten: $\vec{E} \rightarrow \vec{B}$, $\vec{B} \rightarrow -\vec{E}$, $\vec{p} \rightarrow \vec{\mu}$
 Beispiel wäre ein Pulsar, d.h. ein
 rotierendes magnetisches Neutronenstern.
 → Übungen?

Diskussion der Hertz'schen Formeln

Für $\omega \rightarrow \infty$ dominieren die $\frac{1}{r}$ Terme.
 Um festzustellen in welchem Sinn r gross
 ist, betrachten wir periodische Schwankungen
 in der Quelle $\sim e^{i\omega t}$ ($\frac{1}{c} \partial_t \rightarrow -i \frac{\omega}{c} \sim \frac{1}{\lambda}$)

Größenordnung der 3 Terme für \vec{E} :

$$\left(\frac{1}{r\lambda^2} \right) \quad \left(\frac{1}{r^2\lambda} \right) \quad \frac{1}{r^3}$$

Nahzone: $r \ll \lambda$ $\frac{1}{r^3}$ Term dominiert

= statisches elektr. Dipolfeld,
 das dem Dipol $p(t)$ im stat. La folgt

B ist sehr klein gegen E

Feldnahzone: $r \sim \lambda$

Dann ist E von der gleichen Größenordnung
 wie B . B wird durch die Feldnah-
 Wirkung der Verdrängungsströme erzeugt.

Wellenzone : $r \gg \lambda$

$\frac{1}{r}$ Terme dominieren

siehe vorausgegangene Kapitel

BILD für el. Feldlinien :

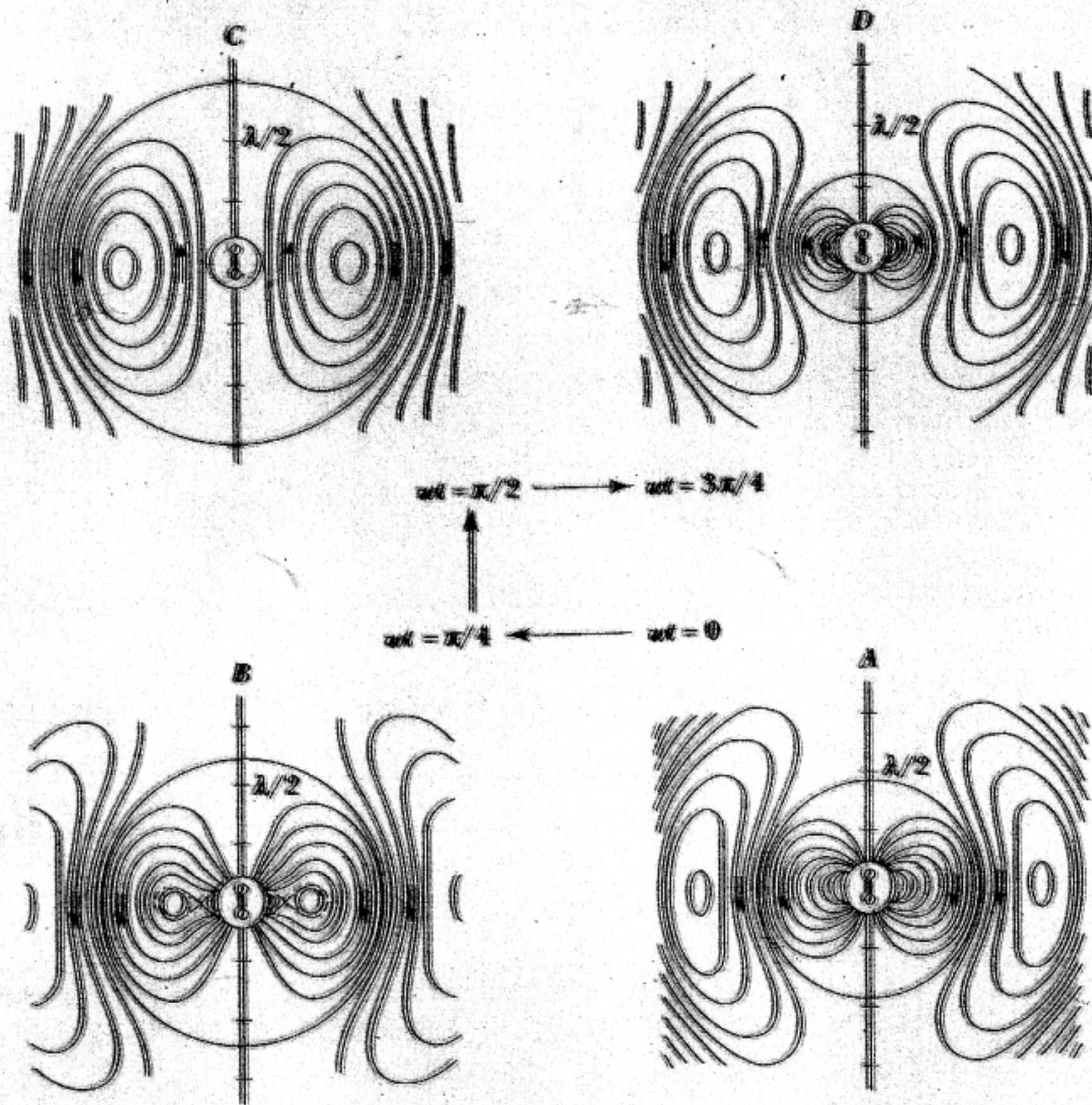


FIGURE 9-6. Snapshots of oscillating dipole. [From Hertz, *Wiedemann's Ann.* **36**, 1 (1889); reprinted in (Hie62).]

And from Eqs. (9.33) and (9.35)

$$\mathbf{E}_2 = \left(\frac{[\dot{p}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \cos\theta \mathbf{e}_r + \left(\frac{[\dot{p}]}{c^2 r} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\theta \quad (9.37)$$

(In the equatorial plane, the unit vector \mathbf{e}_θ is antiparallel with the polar axis defined by \mathbf{p} .) In this component notation, Eq. (9.28) becomes

$$\mathbf{E}_3 = -\frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \cos\theta \mathbf{e}_r + \frac{[\dot{p}]}{c^2 r} \sin\theta \mathbf{e}_\theta \quad (9.38)$$

At last, we have the complete evaluation of Eq. (9.24) for the electric field of a time-dependent linear dipole:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \\ &= \left(\frac{2[\dot{p}]}{r^3} + \frac{2[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \cos\theta \mathbf{e}_r + \left(\frac{[\dot{p}]}{r^3} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (9.39)$$

Note especially the cancellation of the $[\dot{p}]$ terms in the radial components of Eqs. (9.37–38). Thus the only inverse first-power r dependence is in the \mathbf{e}_θ component (from \mathbf{E}_3), which is the transverse radiation term of Eq. (9.13) [see the footnote, p. 290]. The two inverse-cube terms are the familiar field of a static dipole, Eq. (2.9) [and (2.29)]. The two remaining, inverse-square, terms represent the intermediate field that we have just worked so hard to find.

Similarly, for the magnetic field of Eq. (9.27),

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{[\dot{p}]}{c^2 r} + \frac{[\ddot{p}]}{c^2 r} \right) \sin\theta \mathbf{e}_\varphi \quad (9.40)$$

in which we recognize the inverse first-power term as the radiation term of Eq. (9.14). And, in view of Eq. (9.23), the inverse-square term is nothing more than the magnetostatic Biot-Savart law of Eq. (1.36) (Problem 9-3). There is no “intermediate” term in the magnetic field.

From Eqs. (9.39–40) we note that, while \mathbf{E} has a radial component in the near-field region, \mathbf{B} has only an azimuthal component at any distance. The radiation from a time-dependent electric dipole is therefore called *transverse magnetic* (TM). At large distances where $E_r \rightarrow 0$, both fields are transverse and the radiation is called *transverse electromagnetic* (TEM)—approaching the familiar plane wave of Chapter 5. The radiation from a time-dependent magnetic dipole (Section 9.8) turns out to be *transverse electric* (TE).

The most common time dependence is a sinusoidal oscillation with

$$[p] = p_0 e^{-i\omega t'} \quad (9.41)$$

where $t' = t - r/c$ is the retarded time. For this case, and with $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$,

$$E_r = 2p_0 k^3 \left\{ \frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} \right\} \cos\theta e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.42)$$

$$E_\theta = p_0 k^3 \left\{ \frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2} + \frac{1}{kr} \right\} \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.43)$$

$$B_\varphi = -p_0 k^3 \left\{ \frac{i}{(kr)^2} + \frac{1}{kr} \right\} \sin\theta e^{i(kr - \omega t)} \quad (9.44)$$

Figure 9-6, adapted from Hertz,* shows the electric field-lines at four instants in a half cycle of the oscillation. At $t = 0$ (lower right frame), the near field has the appearance of a static dipole (compare Fig. 2-2). As time advances, the field-lines bulge, neck down, and finally are pinched off. The

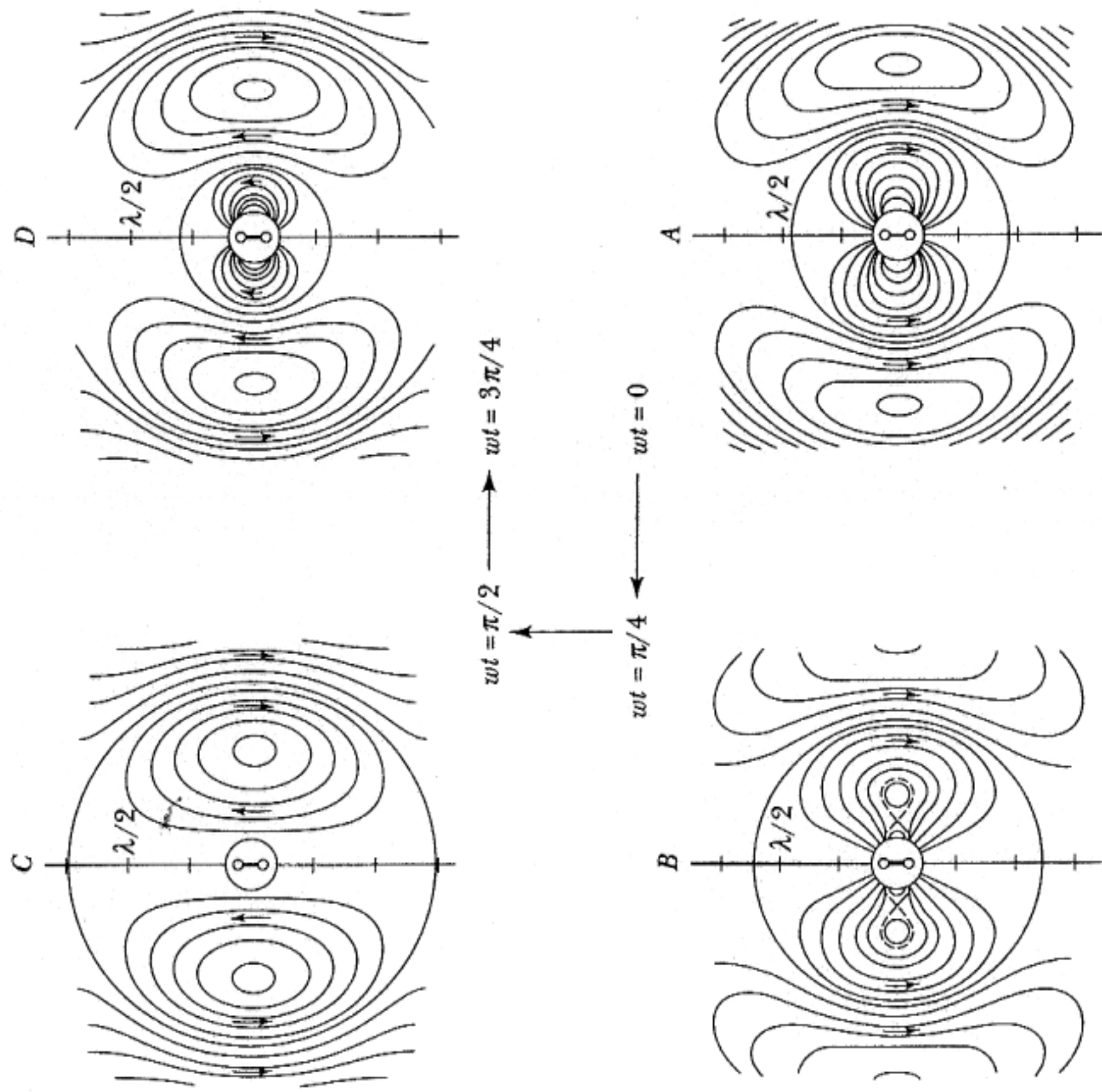


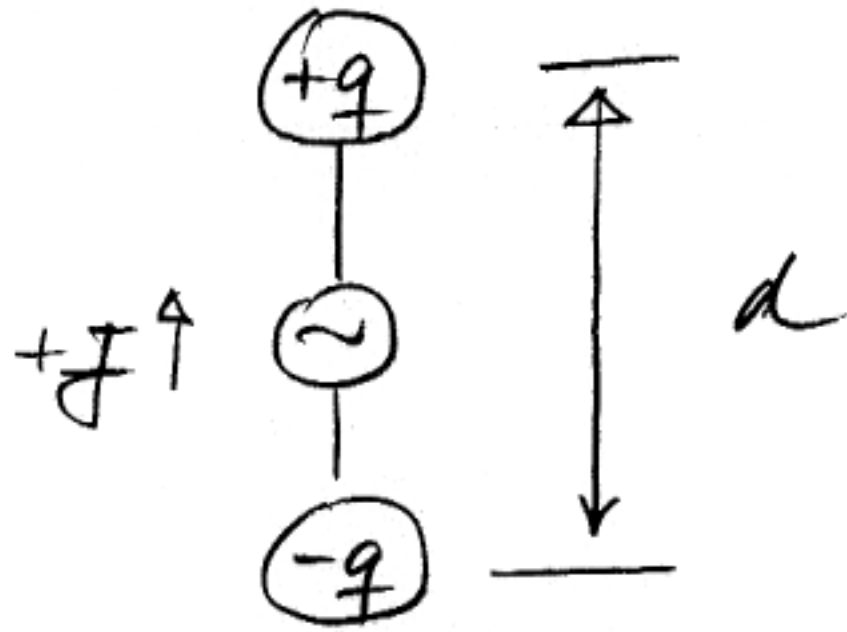
FIGURE 9-6. Snapshots of oscillating dipole. [From Hertz, *Wiedemann's Ann.* 36, 1 (1889); reprinted in (He62).]

*The properties of the fields in the intermediate region were investigated in detail by Hein-

aus Heerde & Horn = classical electrodynamics

Strahlungswiderstand

Wir stellen uns den Hertz'schen Dipol als einen zeitabhängigen Generator vor der 2 Kugeln anläßt



Generatorstrom $J = \frac{dq}{dt}$
Dipolmoment $p = q(t) d$ $\Rightarrow J = \dot{p}/d$

$$p = p_0 e^{-i\omega t} \Rightarrow J = J_0 e^{-i\omega t}$$

$$\text{mit } p_0^2 = (J_0 d / \omega)^2$$

$$\left\langle \frac{dI}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\pi J_0^2}{2c} \left(\frac{d}{r} \right)^2 \sin^2 \vartheta$$

gemäß der allgem. Formel

$$\left. \frac{dI}{d\Omega} \right|_{\text{Dipol}} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{p}^2 \sin^2 \vartheta$$

Die gesamte Leistung ist dann

$$\langle I \rangle = \frac{2}{3c^3} J_0^2 d^2 \omega^2 = \frac{4\pi^2 J_0^2}{3c} \left(\frac{d}{r} \right)^2$$

Um diese Strahlungsleistung aufrecht zu halten muß der Generator dem

oszillierender Dipol beständig Energie zuführen
In Analogie zur Jouleschen Wärme

$$\langle P \rangle_{\text{gem}} = \langle \dot{J}^2 \rangle R = \frac{1}{2} J_0^2 R$$

definiert man den Faktor vor $\frac{1}{2} J_0^2$
in P als den Strahlungs Widerstand

$$R_{\text{str}} = \frac{8\pi^2}{3c} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2$$

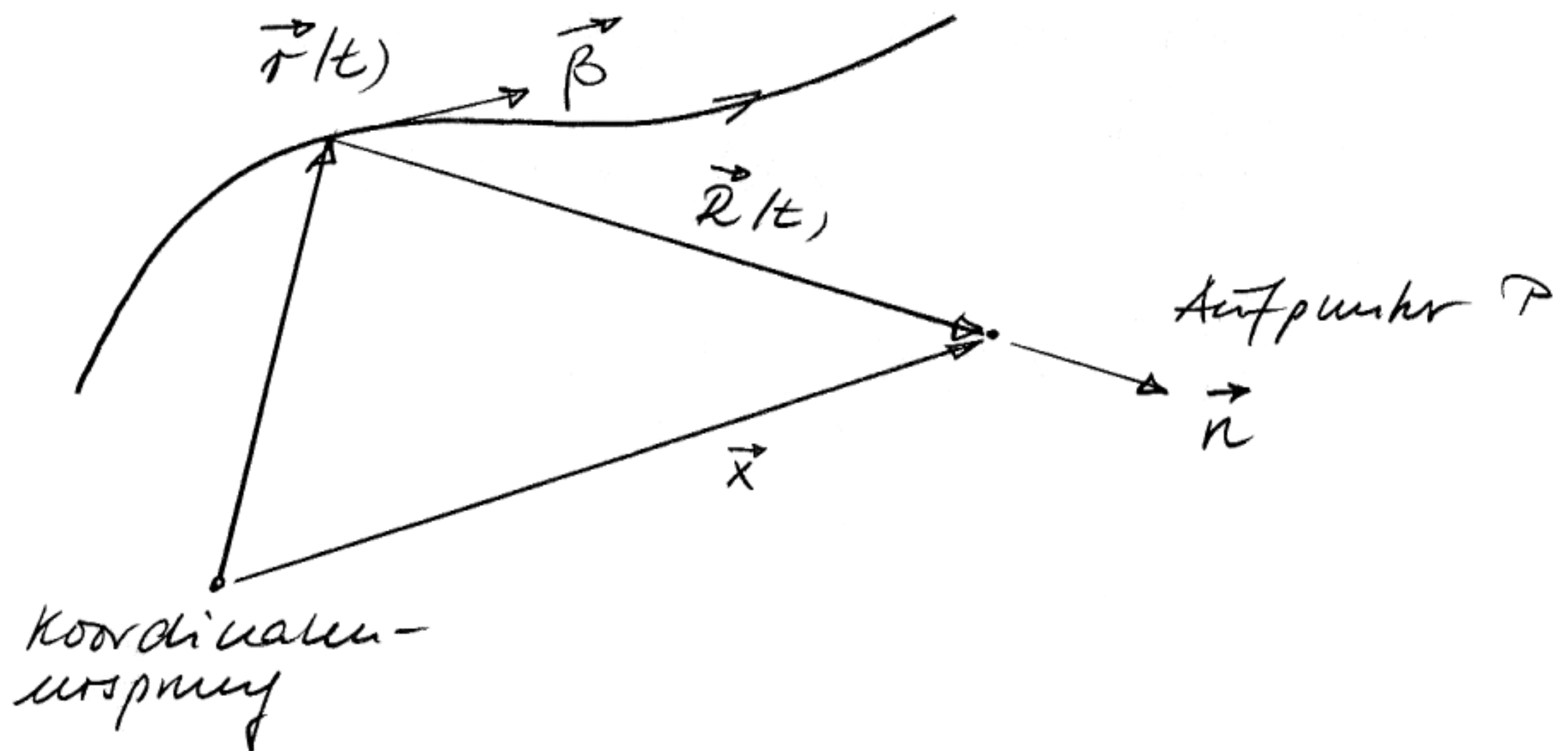
$$\left(\sigma_T: = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 = 789 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \text{ Ohm} \right)$$

wegen $\frac{d}{\lambda} \ll 1$ für Hertz'scher Dipol im
 R_{str} sehr klein!

Effiziente Antennen brauchen $d \sim \lambda$!

7.5. Liénard - Wiechert Potentiale

Ziel dieses Kapitels ist die Berechnung des elektromagnetischen Feldes einer beliebig bewegten Punktladung e . Wir nehmen an daß sich die Punktladung entlang einer Trajektorie $\vec{r}(t)$ bewegt



$\vec{r}(t)$ Ort der Punktladung

\vec{x} Aufpunkt (Beobachtungspunkt)

$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$ Teilchengeschwindigkeit

$$\vec{\beta}(t) = \frac{1}{c} \vec{v}(t)$$

$$\vec{R}(t) = \vec{x} - \vec{r}(t)$$

Abstandsvektor zwischen Beobachtungspunkt P und Aufenthaltsort der Teilchen zur Zeit t

$$\vec{n} = \frac{1}{R} \vec{R} \quad ; \quad R = |\vec{R}|$$

Wir können die Punktladung mit Trajektorie $\vec{r}(t)$ und folgende Ladungs- und Stromdichten beschreiben

$$\rho(\vec{x}, t) = e \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad (1a)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = e \vec{v}(t) \delta(\vec{x} - \vec{r}(t)) \quad (1b)$$

Damit ergibt sich für das skalare Potential

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}, t) &= \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}', t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \\ &= \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}', t')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c}) \\ &= e \int dt' \frac{1}{|\vec{x} - \vec{r}(t')|} \delta(t' - t + \frac{|\vec{x} - \vec{r}(t')|}{c}) \\ (1a) \quad &= e \int dt' \frac{1}{R(t')} \delta(t' - t + \frac{1}{c} R(t')) \end{aligned}$$

Um die Integration über t' auszuführen definieren wir

$$t'' = t' - t + \frac{1}{c} R(t')$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt} \\ dt'' &= dt' + \frac{1}{c} \frac{dR(t')}{dt'} dt' \\ &= dt' - \frac{1}{c} \frac{\vec{v}(t') \cdot \vec{R}(t')}{R(t')} dt' \\ &= dt' (1 - \vec{\beta}(t') \cdot \vec{n}(t')) \end{aligned}$$

und folgen

$$\varphi(\vec{x}, t) = e \int dt'' \frac{\delta(t'')}{R(t') [1 - \vec{\beta}(t') \cdot \vec{n}(t')]} \Rightarrow$$

$$\varphi(\vec{x}, t) = e \frac{1}{R(t') [1 - \vec{\beta}(t') \cdot \vec{n}(t')]} \Big|_{t' = t - \frac{1}{c} R(t')} \quad (*)$$

wobei die retardierte Zeit $t' = t_{\text{ret}}$ die Lösung der impliziten Gleichung

$$t' = t - \frac{1}{c} R(t')$$

ist.

völlig analog findet man

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \left[\frac{e \vec{\beta}}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \cdot R} \right]_{\text{ret}} \quad (**)$$

wobei $[\dots]_{\text{ret}}$ bedeutet, daß $\vec{\beta}$, \vec{n} und R zur retardierten Zeit $t' = t - \frac{1}{c} R(t')$ auszuwerten sind.

(*) und (**) heißen Lienard-Wiecher Potentiale.

Als nächstes wollen wir die Feldstärken $\vec{E}(\vec{x}, t)$ und $\vec{B}(\vec{x}, t)$ berechnen. Man kann diese direkt aus (*) und (**) berechnen. Im wesentlichen ist dies eine recht lässliche algebraische Rechnung (siehe etwa T. Fießbad, Elektrodynamik). Wir wollen hier aber eher erfahren, was wählen, da wir die Helmholtzgleichungen für die elem. Felder angeht. Nach Kapitel 7.3 gilt

$$\Delta \vec{E}^\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}^\omega = 4\pi \left(\nabla \rho^\omega + \frac{-i\omega}{c^2} \vec{j}^\omega \right)$$

$$\Delta \vec{B}^\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{B}^\omega = -\frac{4\pi}{c} \text{rot} \vec{j}^\omega$$

Wir kennen die Lösungen derartigen Helmholtz-Gleichungen aus dem Anfang zur Fouriertransformation. In der weiteren Rechnung betrachten wir uns auf das elektr. Feld \vec{E}^ω und überlassen die Rechnung für \vec{B}^ω zur Übung.

Für das retardierte Feld gilt

$$\vec{E}^\omega(\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{\exp(i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \left[\vec{\nabla}' \rho^\omega - \frac{i\omega}{c^2} \vec{j}^\omega \right]$$

wobei

$$\rho^\omega(\vec{x}') = \int dt' e^{i\omega t'} \rho(\vec{x}', t')$$

$$\vec{j}^\omega(\vec{x}') = \int dt' e^{i\omega t'} \vec{v}(t') \rho(\vec{x}', t')$$

Folglich gilt

$$\vec{E}^\omega(\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t' + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)} e$$

$$\left(\vec{\nabla}' - \frac{i\omega}{c^2} \vec{v}(t') \right) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

$$= -e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t' + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|)}$$

$$\left(\vec{\nabla}' - \frac{i\omega}{c} \vec{\beta}(t') \right) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

wobei $\vec{\beta} := \frac{1}{c} \vec{v}$

$$= -e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t'+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})} (\vec{v}' - \frac{i\omega}{c} \vec{\beta}(t')) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

$$= +e \int \frac{d^3x'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int dt' e^{i\omega(t'+\frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})} \left(-\frac{i\omega}{c} \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} + \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^2} \right.$$

p.I. im 1. Term

Randterme verschwinden

$$+ \frac{i\omega}{c} \vec{\beta}(t')) \delta(\vec{x}' - \vec{r}(t'))$$

$$= e \int dt' e^{i\omega(t'+\frac{1}{c}R(t'))} \left[-\frac{i\omega}{c} \frac{\vec{R}}{R^2} + \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{i\omega}{c} \frac{1}{R} \vec{\beta} \right]$$

$$= e \int dt' e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \frac{1}{R} \left(\frac{\vec{R}}{R^2} - \frac{i\omega}{c} (\vec{n} - \vec{\beta}) \right)$$

$$\stackrel{*}{=} e \int dt' e^{i\omega(t'+R(t')/c)} \left[\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{R(1-\vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right) \right]$$

Führe nun die Fourier - Rücktransf. aus

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = e \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \int dt' e^{i\omega(t'+R(t')/c)}$$

$$\left[\frac{\vec{R}(t')}{R^3(t')} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{n}(t') - \vec{\beta}(t')}{R(t')(1-\vec{\beta}(t') \cdot \vec{n}(t'))} \right) \right]$$

$$= e \int dt' \delta(t' - t + \frac{R}{c}) \left[\dots \right]$$

$$= e \int dt'' \delta(t'') \frac{1}{1-\vec{\beta} \cdot \vec{n}} \left[\dots \right]$$

$$= \left[\frac{e}{1-\vec{\beta} \cdot \vec{n}} \left(\frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{1}{c} \frac{d}{dt'} \left(\frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{R(1-\vec{\beta} \cdot \vec{n})} \right) \right) \right]_{t=t'}$$

*) Verwende

$$\frac{d}{dt'} e^{i\omega(t'+R/c)} = i\omega(1-\vec{\beta} \cdot \vec{n}) e^{i\omega(t'+R/c)}$$

und dass bei p.I. die Randterme weggelassen werden können.

Die weitere Rechnung ist die Auswertung der Ableitung im 2. Term. Die Rechnung ist trivial, aber etwas langwierig:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\vec{n} - \vec{\beta}}{R(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})} &= \\ &= \frac{(\dot{\vec{n}} - \dot{\vec{\beta}})(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) - (\vec{n} - \vec{\beta})(\dot{R} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta} - \vec{R} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \\ &= \frac{[-\dot{\vec{\beta}}(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) + (\vec{n} - \vec{\beta})(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta})] + [\dot{\vec{n}}(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) - (\vec{n} - \vec{\beta})(\dot{R} - \dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta})]}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^2} \end{aligned}$$

a) Beide Nennigengsterm $\sim \dot{\vec{\beta}}$

$$= -\dot{\vec{\beta}}(R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) + (\vec{n} - \vec{\beta})(\dot{\vec{R}} \cdot \vec{\beta})$$

$$= R(-\dot{\vec{\beta}}(1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta}) + (\vec{n} - \vec{\beta})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}))$$

$$= R(-\dot{\vec{\beta}}((\vec{n} - \vec{\beta}) \cdot \vec{n}) + (\vec{n} - \vec{\beta})(\vec{n} \cdot \dot{\vec{\beta}}))$$

$$= R(\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}))$$

↑

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\dot{\vec{R}} = -\dot{\vec{r}} = -\vec{\beta} \cdot c$$

$$\dot{\vec{R}} = -\vec{\beta} \cdot \vec{n} c$$

$$\dot{\vec{n}} = (\vec{R}/R)' = \frac{R \dot{\vec{R}} - \vec{R} \cdot \dot{R}}{R^2} = -\frac{c}{R}(\vec{\beta} - \vec{n}(\vec{\beta} \cdot \vec{n}))$$

$$\dot{\vec{n}} \perp \vec{n}$$

b) Gedanklich kein abh. Terme

$$\begin{aligned}
 & \vec{n} (R - \vec{\beta} \cdot \vec{R}) - (\vec{n} - \vec{\beta}) (R - \vec{R} \cdot \vec{\beta}) \\
 &= -\frac{c}{R} (\vec{\beta} - \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n})) R (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}) \\
 &\quad - (\vec{n} - \vec{\beta}) (-c) (\vec{\beta} \cdot \vec{n} - \beta^2) \\
 &= -c \left(\vec{\beta} - \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) - \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) + \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 \right. \\
 &\quad \left. - \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \beta^2 + \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) - \vec{\beta} \beta^2 \right) \\
 &= -c \left(\vec{\beta} (1 - \beta^2) - 2 \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n}) + \vec{n} (\beta^2) \right. \\
 &\quad \left. + \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 \right) \\
 &= -c \left(\vec{\beta} (1 - \beta^2) + \vec{n} (\beta^2 - 1) \right. \\
 &\quad \left. \vec{n} \left(\underbrace{(\vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 + 1 - 2 \vec{n} (\vec{\beta} \cdot \vec{n})}_{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2} \right) \right) \\
 &= -c \left(-(\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2) + \vec{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 \right)
 \end{aligned}$$

Zusammen:

$$= \frac{R (\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})) - c (-(\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2) + \vec{n} (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2)}{R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2}$$

$$= \frac{\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \vec{\beta})}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^2 R} + \frac{c (\vec{n} - \vec{\beta}) (1 - \beta^2)}{R^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{\beta})^2} - \underbrace{\frac{c}{R^2} \frac{R}{R}}$$

kürzt den 1. Term
in $\vec{E}(\vec{x}, t)$

Damit findet man insgesamt

$$\vec{E} = e \left[\frac{(\vec{n} - \vec{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R^2} + \frac{\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})}{c (1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}$$

Eine analoge Rechnung führt auf

$$\vec{B} = [\vec{n}]_{\text{ret}} \times \vec{E}$$

Damit sind die elem. Felder einer beliebig bewegten Ladung explizit bestimmt; sie heißen Lienard - Wichner Felder.

Der 1. Term in \vec{E} ist das Feld einer gleichförmig bewegten Punktladung. Dies Feld kann man auch über eine Lorentz-Transformation aus dem elektrischen Feld einer ruhenden Punktladung berechnen (siehe späteres Kapitel zur kovarianten Formulierung der Elektrodynamik). Dieser 1. Term ist proportional zu $1/R^2$ und trägt damit auch nicht zur Strahlung bei. Dies ist konsistent mit der Lorentz-Invarianz der Elektrodynamik, da man immer in ein Bezugssystem gehen kann (für $\dot{\vec{\beta}} = 0$) in welchem die Punktladung ruht und folglich nicht strahlen kann.

Der 2. Term ist proportional zur Teilchenbeschleunigung $\dot{\vec{\beta}}$. Er fällt wie $1/R$ ab und bestimmt folglich die Abstrahlung.

Der zugehörige Energiefluss in Richtung von $\vec{n} = \vec{r}/R$ lautet

$$\vec{S} \cdot \vec{n} = \frac{c}{4\pi} |\vec{E}|^2$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \frac{e^2}{c} \left[\frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^6} |\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})|^2 \right]_{\text{ret}}$$

Man merke sich, daß die Richtung der Vektoren innerhalb des Absolutbetrags die Richtung des \vec{E} -Feldes angeben, d.h. die Polarisation der Strahlung.

Beachte auch daß für den Strahlungsanteil \vec{E} und $\vec{B} \perp \vec{n}$ sind.

7.6. Strahlung von beschleunigten Punktladungen

Der Ausdruck Φ gibt die pro Zeiteinheit und Flächeneinheit in Richtung von \vec{n} (am Aufpunkt) abgestrahlte Energie zur Zeit t an. Diese Strahlung wurde zur Zeit $t_{\text{ret}} = t - R(t_{\text{ret}})/c$ ausgestrahlt. Interessant für uns ist die Energie, die das Teilchen auf seiner Bahn pro retardierter Zeiteinheit verliert. Wegen

$$\frac{dt_{\text{ret}}}{dt} = 1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n}$$

ist die Strahlungsleistung in dem Raumwinkel $d\Omega$

$$\begin{aligned} \frac{dP(t_{\text{ret}})}{d\Omega} &= R^2 (\vec{J} \cdot \vec{n}) \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} \\ &= \frac{e^2}{4\pi c} \frac{1}{(1 - \vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} \underbrace{|\vec{n} \times ((\vec{n} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}})|^2}_{\text{Richtung des E-Feldes}} \end{aligned}$$

Diese wichtige Formel werden wir in folgenden mehrfachen anwenden.

BEACHTEN

Notation $\vec{J} \equiv P$ (Leistung)

(a) Nichtrelativistische Grenzfall ($\beta \ll 1$)

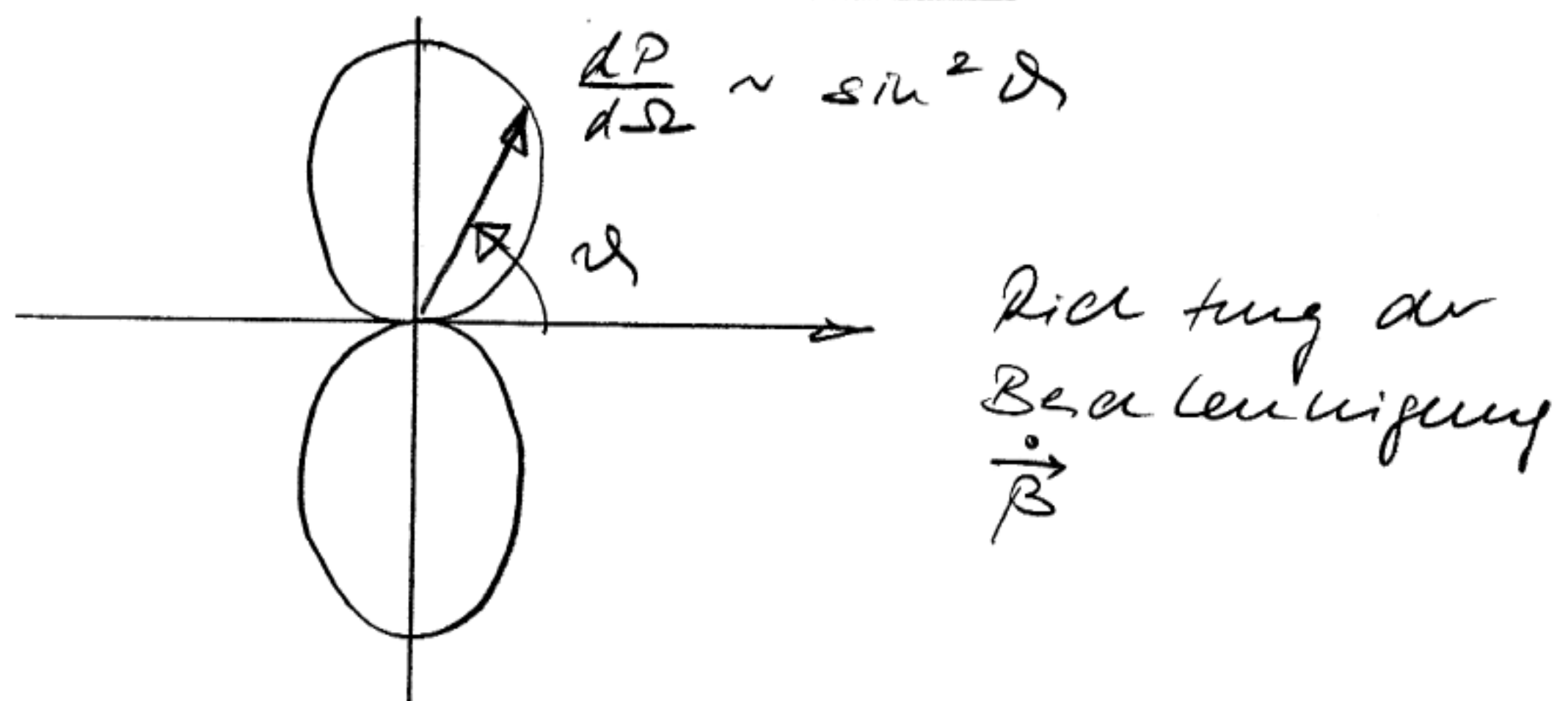
Dieser Fall ist z.B. für Röntgenstrahlen relevant, wenn die Elektronen in Metallen abgebremst werden, führt dies zu einer elem. Strahlung, die sog. Bremsstrahlung

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{e^2}{4\pi c} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2} \quad \beta \ll 1$$

$$d\Omega = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\phi$$

Die abgestrahlte Leistung $dP/d\Omega$ hängt nicht von der Richtung der Geschwindigkeit $\vec{\beta}$ ab, sondern von der Richtung nach von der Größe der Geschwindigkeit

$$\boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} |\dot{\vec{\beta}}|^2 \sin^2\vartheta}$$



Die Strahlungsverteilung wird als Polarkoordinate $\vartheta = dP/d\Omega$ im ϑ - ϑ Diagramm aufgetragen.

Die gesamte Strahlungswirkung betren

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{v}}^2 \quad (\text{Larmor Formel})$$

(b) Relativistische Verallgemeinerung der Larmor Formel

Man kann die relativistische Verallgemeinerung auch mit etwa Hilfe durch Winkelintegration der allgemeiner Ausdruck für $dP/d\Omega$ erhalten. Einfacher geht dies mit einer relativistischen Überlegung. Da die abgestrahlte Energie dE_s in der Zeit dt_{ret} gleich $P dt_{\text{ret}}$ ist und dE_s die 0-Komponente eines 4er Vektors ist, muss P Lorentz invariant sein (dt_{ret} ist 0-Komponente des 4er Vektors x^μ).

$P =$ Lorentz skalar

P darf nur von β und $\dot{\beta}$ abhängen wie ein Blick auf die Gleichung für $dP/d\Omega$ zeigt. Durch diese Forderung und den bereits berechneten nicht-rel. Grenzfall ist P eindeutig bestimmt

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{1}{m^2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\rightarrow - \frac{2e^2}{3c^3 m^2} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

Wobei p der Vierimpuls ist und τ die Eigenzeit

$$p^\mu = m\gamma (c, \vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad \text{da Lorentzskalar}$$

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$cdt = \gamma c d\tau \quad (d\tau = dt \sqrt{1-\beta^2})$$

Diese kann formulierung ist die einzig mögliche, denn man hat nur die 4er Vektoren p und $dp/d\tau$ zur Verfügung stehen. Wegen

$$p \cdot p = m^2 c^2 \quad \text{ist} \quad p \cdot \frac{dp}{d\tau} = 0$$

Wir wollen nun den relativistisch kovarianten Ausdruck

$$\mathcal{F} = - \frac{2e^2}{3m^2 c^3} \frac{dp^\mu}{d\tau} \frac{dp_\mu}{d\tau}$$

ausdrückt durch $\vec{\beta}$ und $\dot{\vec{\beta}}$ ausdrücken.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= \left(\frac{d}{d\tau} (m\gamma c), \frac{d}{d\tau} (m\gamma \vec{v}) \right) \\ &= \left(\sqrt{1-\beta^2} \right)^{-1} \left(\frac{d}{dt} \frac{mc}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{d}{dt} \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \right) \\ &= \left(\sqrt{1-\beta^2} \right)^{-1} \left(\frac{\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}}{(1-\beta^2)^{3/2}} mc, \frac{m\vec{v} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})}{(1-\beta^2)^{3/2}} + \frac{mc \dot{\vec{\beta}}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \\ &= (mc) \left(\gamma^4 \vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}, \gamma^4 \vec{\beta} (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}}) + \gamma^2 \dot{\vec{\beta}} \right) \end{aligned}$$

die Minkowski Länge dann wir

$$\begin{aligned} - \frac{dp}{dt} \frac{dp}{dt} &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \beta^2 \gamma^2 + 2(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma^2} (\dot{\vec{\beta}})^2 - \gamma^2 (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 \right] \\ &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[(\dot{\vec{\beta}} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (\gamma^2 \beta^2 + 2 - \gamma^2) + \frac{1}{\gamma^2} (\dot{\vec{\beta}})^2 \right] \end{aligned}$$

wir benutzen $(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 = \beta^2 \dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2$

und erhalten

$$\begin{aligned} - \frac{dp}{dt} \frac{dp}{dt} &= m^2 c^2 \gamma^6 \left[-(\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 + \beta^2 \dot{\beta}^2 + \frac{1}{\gamma^2} \dot{\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. - \underbrace{(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 + (\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{\beta}})^2 (\gamma^2 \beta^2 + 2 - \gamma^2)}_{=0} \right] \end{aligned}$$

$$- \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 = m^2 c^2 \gamma^6 \left(\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right)$$

Folglich finden wir

$$\mathcal{P} = \frac{2e^2}{3c} \gamma^6 \left[\dot{\beta}^2 - (\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}})^2 \right]$$

c) Lineare Bewegung $\vec{\beta} \parallel \dot{\vec{\beta}}$

Dieser einfachen Fall ist insbesondere für linear beschleunigte relevant.

$$\vartheta = \angle(\vec{\beta}, \vec{n})$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c} \frac{1}{(1-\vec{\beta} \cdot \vec{n})^5} |\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}})|^2$$

$$= \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{\dot{v}^3}{(1-\beta \cos \vartheta)^5} \sin^2 \vartheta$$

$\beta \ll 1 \quad \leadsto$ Larmor-Formel

$\beta \rightarrow 1 \quad \leadsto$ Strahlung konzentriert in Vorwärtsrichtung

Die Intensität wird maximal bei

$$\vartheta_{\max} = \cos^{-1} \left[\frac{1}{3\beta} (\sqrt{1+15\beta^2} - 1) \right] \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} \frac{1}{2\beta}$$

In diesem extrem relativistischen Fall

ist die Intensität beim Maximum $\sim \gamma^8$.

Die Strahlung ist in einem kleineren Winkel

in der Vorwärtsrichtung konzentriert.

Näherungsweise gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{8}{\pi} \frac{e^2}{c^3} \dot{v}^2 \gamma^8 \frac{(\gamma \vartheta)^2}{(1+\gamma^2 \vartheta^2)^5}$$

$$\sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = \frac{1}{\gamma}$$

Die gesamte Strahlungsverlustung ist nach der allgemeinen Formel

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 [\dot{\beta}^2]$$
$$= \frac{2e^2}{3c} \dot{v}^2 \gamma^6$$

→ siehe Figur nächste Seite für $\frac{dP}{d\Omega}$

SLAC: e in 3 km auf 50 GeV

Die Strecke auf der die Energie um die Ruheenergie der Elektronen erhöht wird

($m_e c^2 = 0.5 \text{ MeV}$) ist

$$l = \frac{m_e c^2}{dE/dl} = \frac{0.5 \text{ MeV}}{50 \text{ GeV}/3 \text{ km}} = 3 \text{ cm}$$

Hochrel. Fall ($E \gg m_e c^2$): $E \approx pc$
und $v \approx c$

$$\leadsto \frac{dp}{dt} \approx \frac{d(E/c)}{dt} \approx \frac{d(E/c)}{dl/c} = \frac{dE}{dl} = \frac{m_e c^2}{l}$$

$$\Delta E_{\text{str}} (l = 3 \text{ cm}) \approx P \cdot \frac{l}{c}$$

$$\approx \frac{2e^2}{3m_e^2 c^3} \left(\frac{m_e c^2}{l} \right)^2 \frac{l}{c} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{l} = \frac{2}{3} \frac{14.4 \text{ eV}}{3 \text{ cm}/c}$$

$$\approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ eV} \ll \ll \Delta E = m_e c^2 \approx 5 \cdot 10^5 \text{ eV}$$

$$\left(\frac{e^2}{\text{Å}} = 14.4 \text{ eV} \right)$$

Strahlungsverluste für SLAC vernachlässigbar!

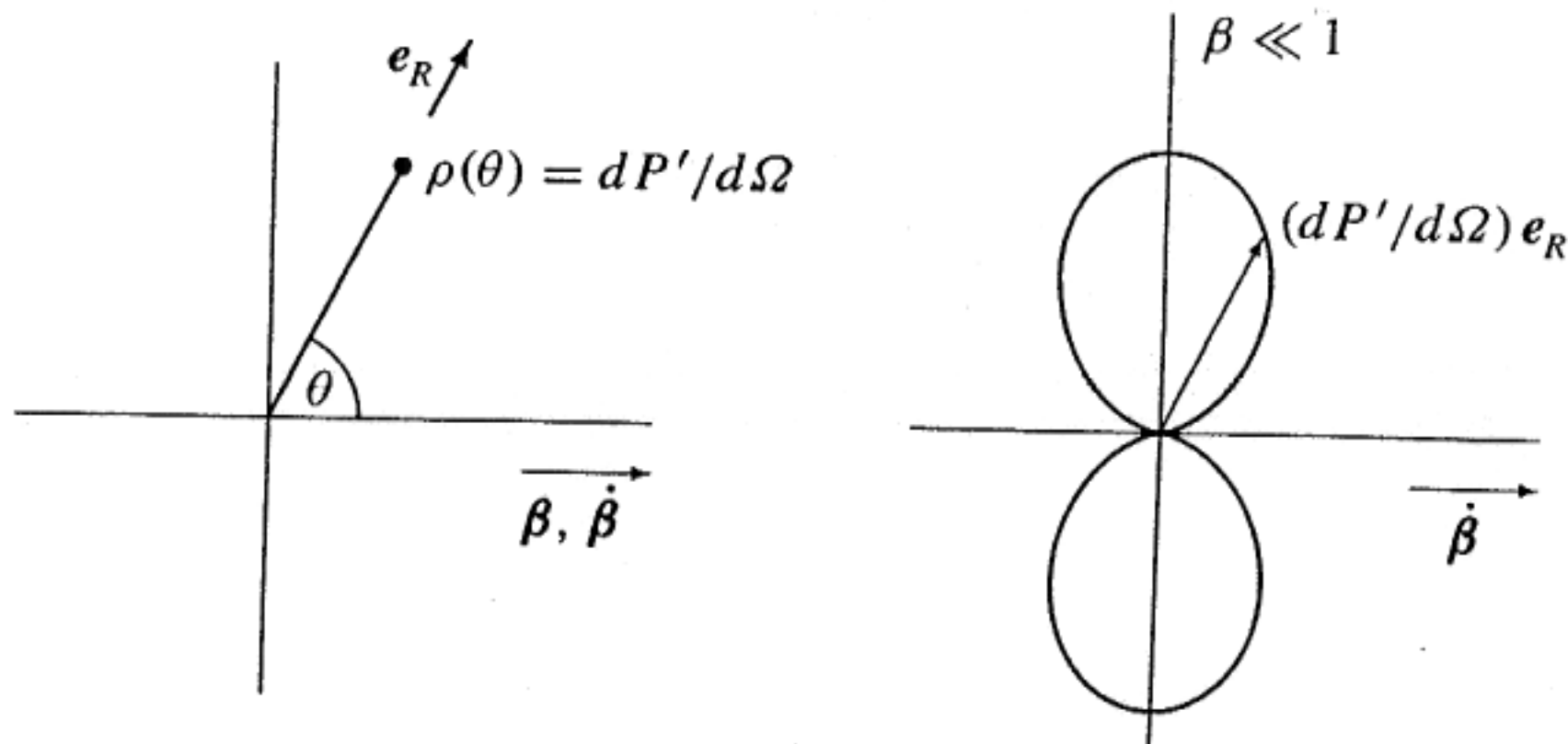


Abbildung 23.3 Die Strahlungsleistung (23.31) wird als Polarkoordinate $\rho = dP'/d\Omega$ im ρ - θ -Diagramm aufgetragen (links). Dabei ist θ der Winkel zwischen $\mathbf{v} \parallel \dot{\mathbf{v}}$ und der Ausstrahlungsrichtung \mathbf{e}_R . Rechts ist die Strahlungsleistung $dP'/d\Omega \propto \sin^2 \theta$ für $\beta \ll 1$ gezeigt. In Richtung von \mathbf{e}_R ist ein Vektor mit dem Betrag $dP'/d\Omega$ eingezeichnet. Für $\beta \ll 1$ ist die Abstrahlung unabhängig von der Richtung von \mathbf{v} . Die abgestrahlte Leistung ist proportional zu $\dot{\mathbf{v}}^2$.

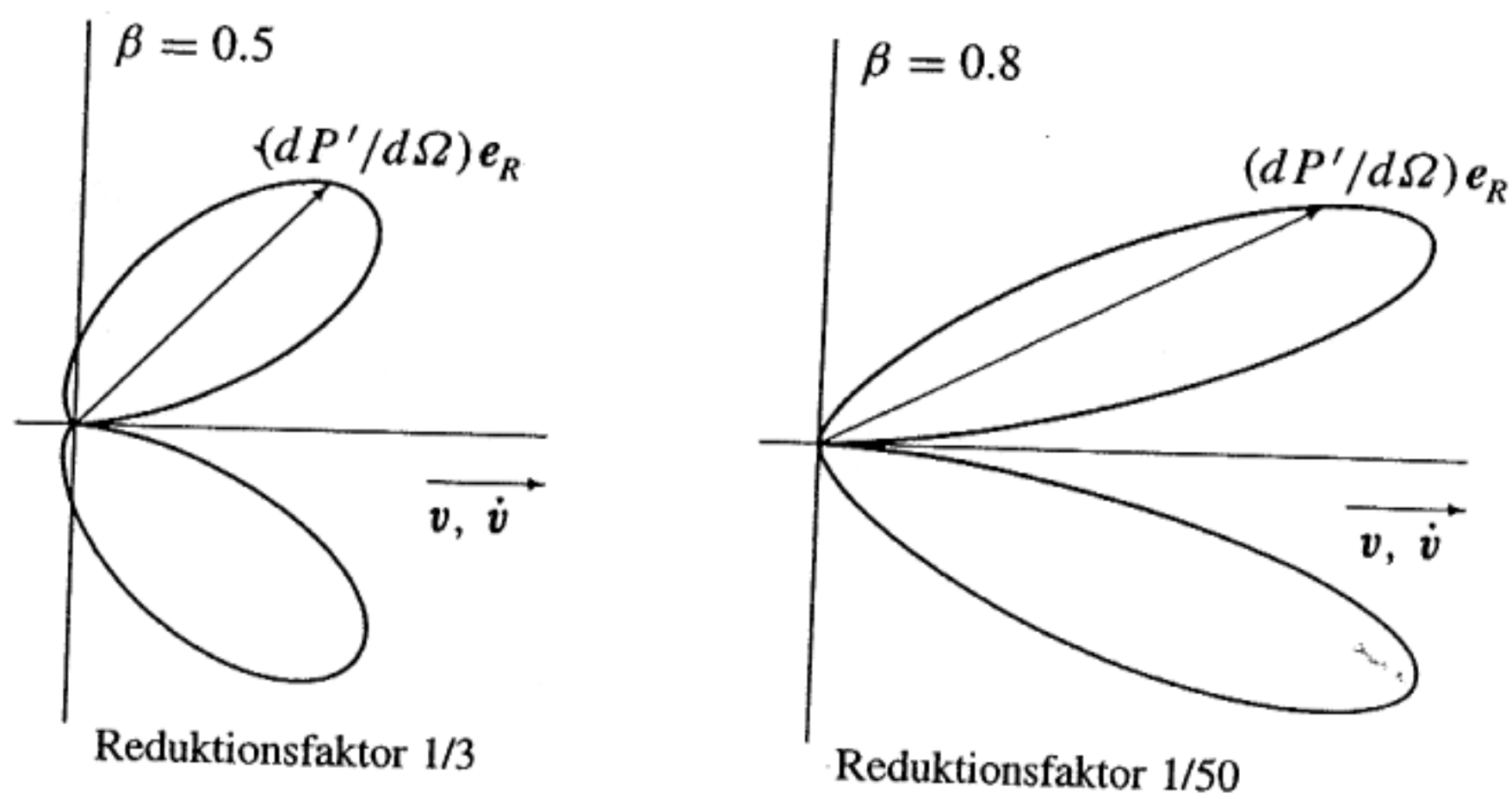


Abbildung 23.4 Winkelverteilung der Abstrahlung (23.31) einer beschleunigten Ladung für $\beta = 0.5$ und $\beta = 0.8$, jeweils für $\mathbf{v} \parallel \dot{\mathbf{v}}$. Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die Strahlung stark an und ist immer mehr nach vorn gerichtet. Die hier gezeigten Kurven wären in jeder Richtung um den Faktor 3 beziehungsweise 50 zu strecken, wenn man sie in Abbildung 23.3 rechts einzeichnen wollte; der Wert von $\dot{\mathbf{v}}^2$ ist dabei in allen Fällen derselbe.

Thiefbed, Elektrodynamik

d) Zirkularbewegung: Synchrotronstrahlung

Ganz anders ist das bei der zirkularbewegung
Die totale Strahlungsleistung ist

$$P = \frac{2e^2}{3c} \gamma^4 |\dot{\vec{\beta}}|^2$$

Für eine Kreisbewegung mit Radius ρ
und Kreisfrequenz ω kann man das
auch schreiben als

$$P = \frac{2e^2}{3c} \frac{v^2}{\rho^2} \beta^2 \gamma^4 = \frac{2e^2}{3} \frac{c}{\rho^2} \beta^4 \gamma^4$$
$$= \frac{2e^2}{3c} \omega^2 \beta^2 \gamma^4 \sim \gamma^4$$

Der Faktor γ^4 besagt, daß hier enorme
Strahlungsverluste auftreten. Die ist bei
zirkularen Elektronbeschleunigern wie LEP
der Fall. Der Strahlungsverlust pro
Umlauf ist

$$\Delta E = \frac{2\pi\rho}{c\beta} P = \frac{4\pi}{3} \frac{e^2}{\rho} \beta^3 \gamma^4$$

Für $\beta \approx 1$ ist die für Elektronen und
Positronen

$$\Delta E (\text{MeV}) = 8.85 \cdot 10^{-2} \frac{[E (\text{GeV})]^4}{\rho (\text{Meter})}$$

Der zugehörige Strom (für Teilchen) ist

$$\frac{I}{e} = e \frac{1}{2\pi\rho/c\beta} = \frac{e\beta c}{2\pi\rho}$$

$$\text{also } P = \frac{I}{e} \delta E$$

In Zahlen

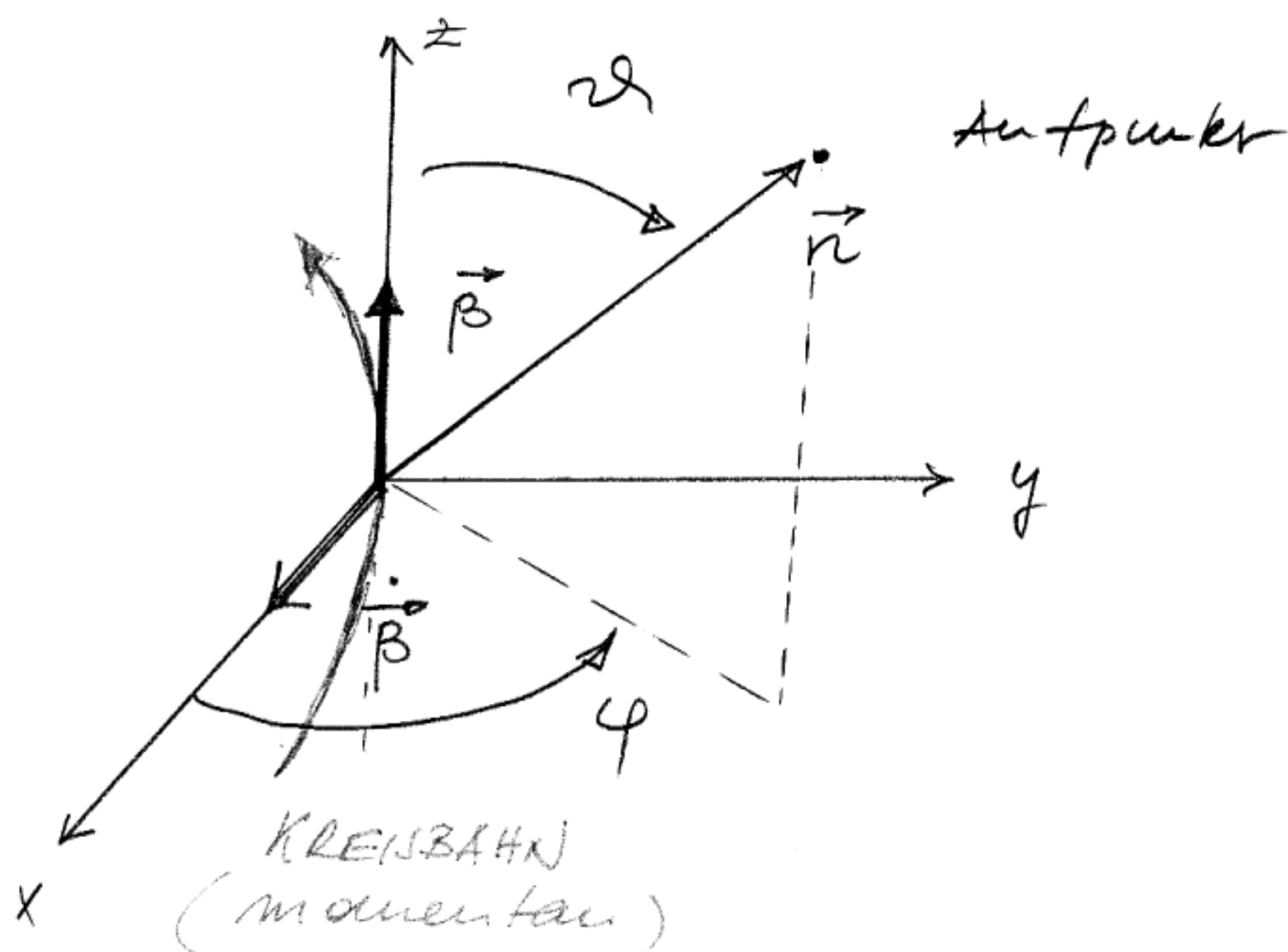
$$P(\text{Watt}) = 10^6 \delta E (\text{MeV}) I (\text{Amp})$$

LEP: $\rho = 4,3 \text{ km}$; $E = 100 \text{ GeV}$

$$\delta E = 8,85 \cdot 10^{-2} \frac{(100)^4}{4,3 \cdot 10^3} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ MeV}$$

$$P = 10^6 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot I (\text{Amp})$$

Winkelverteilung



Länge momentane Oberberung von $\vec{\beta}$
 in z-Richtung und $\vec{\beta}$ in x-Richtung
 d.h. Kreisbahn in der x-z-Ebene.
 Polarkoordinaten für Beobachtungspunkt
 (α, φ)

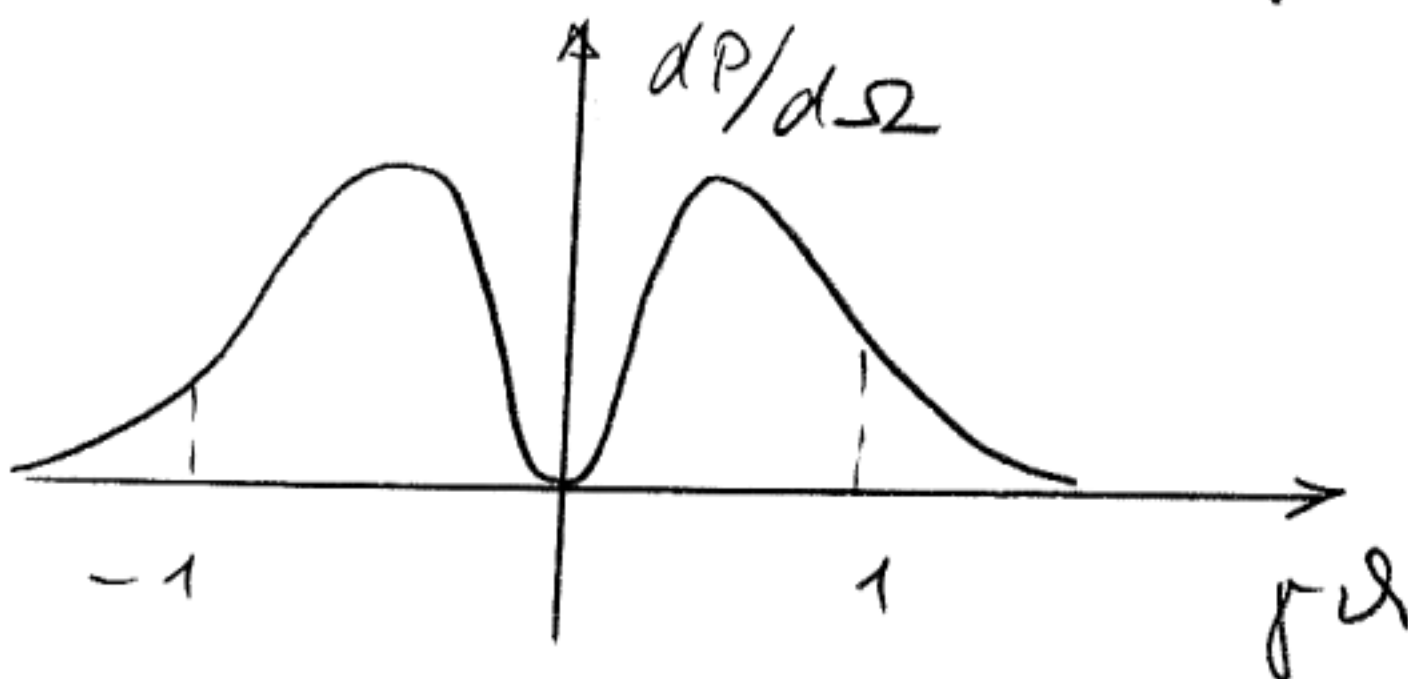
Aus der allgemeinen Formel findet man
(nach ein wenig Algebra)

$$\left| \frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \dot{v}^2 \frac{1}{(1-\beta \cos\vartheta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2\vartheta \cos^2\varphi}{\gamma^2 (1-\beta \cos\vartheta)^2} \right] \right|$$

→ siehe Illustration folgende Seite

Für $v \rightarrow c$ erhält man wieder eine
direktionsreiche Vorwärtsspitze. Für kleine
Winkel ϑ gilt

$$\frac{dP}{d\Omega} \approx \frac{2e^2}{\pi c^3} \dot{v}^2 \gamma^6 \frac{1}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^3} \left[1 - \frac{4\gamma^2\vartheta^2 \cos^2\varphi}{(1+\gamma^2\vartheta^2)^2} \right]$$



Diese Strahlung wird auch als Synchrotron-
strahlung bezeichnet. Man beobachtet
sie nicht nur bei zirkular beschleunigten
Ionen und in heißen Plasmen (z.B.
dem Krebswebel und Fusionsreaktoren)

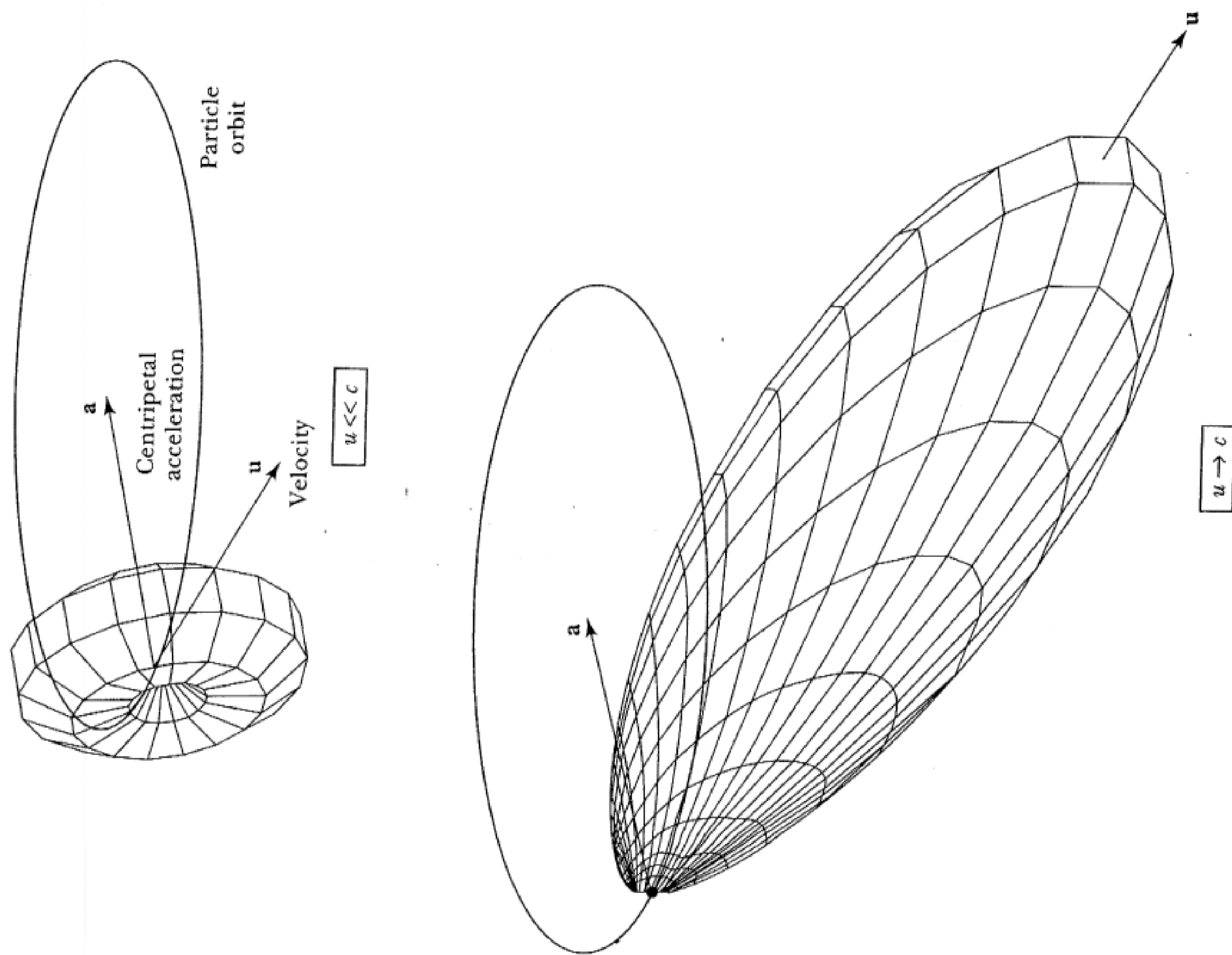


FIGURE 8-8. Radiation pattern of a charge in a circular orbit: nonrelativistic and relativistic cases.

machines (betatrons, cyclotrons, synchrotrons). In a linear machine the only acceleration is that associated with the particle's increase of speed; once the particle becomes relativistic ($u \approx c$), there is little radiation as further sections of the accelerator continue to increase the particle's energy. In circular machines, there is a continuous centripetal acceleration, and its associated radiation becomes dominant as $u \rightarrow c$. For a relativistic particle in a circular orbit of radius a , the centripetal acceleration approaches

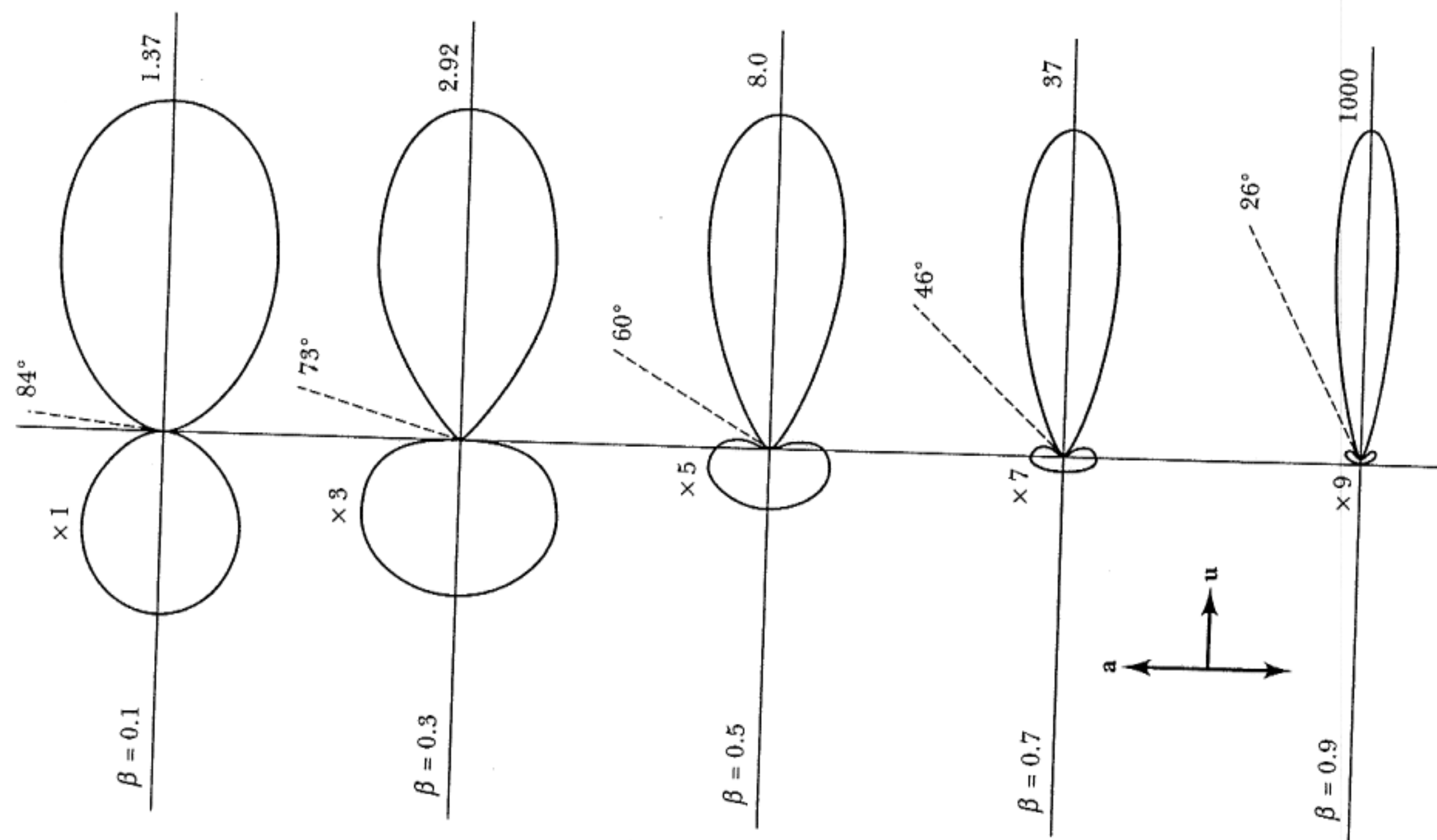
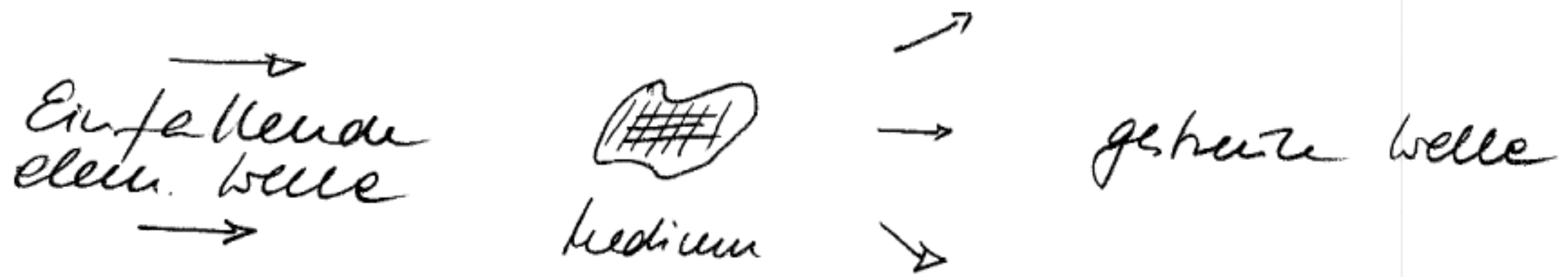


FIGURE 8-9. Angular dependence of synchrotron radiation in plane of orbit (velocity is to the right; acceleration is up or down).

8. Streuung elektromagnetischer Wellen



Fällt eine elem. Welle auf ein Medium ein, so bewirkt sie eine Bewegungsänderung der in diesem Medium befindlichen Ladungen. Diese zeitlich veränderlichen Ladungsverteilungen führen zur Abstrahlung von gestreuten Wellen. Auf diesem Streuprozess beruht z.B. die blaue Farbe des Himmels und die rote Farbe der untergehenden Sonne. Außerdem sind Streuprozesse von Bedeutung für Strukturuntersuchungen von Materie.

8.1. Harmonisch gestaute Elektronen

Ladung e

Oszillat.freq. ω_0 ; Dämpfung γ

Mass m

Teilchenbahn $\vec{z}(t)$

Bewegungsgleichung

$$(*) \quad m \ddot{\vec{z}}(t) + m \gamma \dot{\vec{z}} + m \omega_0^2 \vec{z} = e \vec{E} + \sigma \left(\frac{v}{c} \right)$$

Dämpfung
harmon. Bindung
elekt. Feld

$v \ll c$; vernachlässige Lorentzkraft
 $e \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$

Einfallende ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{e} E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{z} - \omega t)}$$

↑ ↑
Polarisation Amplitude

Wir nehmen an, daß $\lambda \gg |\vec{z}(t)|$
so daß $\exp(i\vec{k} \cdot \vec{z}) \approx 1$

Dann wird die Bewegungsgleichung zu

$$m \ddot{\vec{z}} + m \gamma \dot{\vec{z}} + m \omega_0^2 \vec{z} = e E_0 \vec{e} e^{-i\omega t}$$

Die Lösung dieser Dgl. setzt man aus der allgem. Lösung der homogenen Gleichung, \vec{z}_h , und einer partikulären Lösung, \vec{z}_p , der inhomogenen Gleichung zusammen. Die homogene Lösung \vec{z}_h zerfällt auf einer Zeitskala $\tau \sim 1/\gamma$ (Einschwingvorgang)

$$\vec{z}_p = \vec{a} e^{-i\omega t} \quad \text{Ansatz für part. Lsg.}$$

$$\Rightarrow (-\omega^2 - i\gamma\omega + \omega_0^2) \vec{a} = \frac{e}{m} E_0 \vec{e}$$

Man findet also ein zeitabh. Dipolmoment

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= e \vec{z}(t) \\ &= \frac{e^2 E_0}{m} \vec{e} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \\ &= \alpha(\omega) \vec{E} \end{aligned}$$

$\alpha(\omega) =$ Polarisierbarkeit

$$\alpha(\omega) = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

Wir verwenden nun die Larmor Formel für die pro Raumwinkel $d\Omega$ abgestrahlte Leistung; $\langle \rangle$ = zeitliche Mittelung

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\langle \dot{\vec{p}}^2 \rangle}{4\pi c^3} \sin^2 \theta$$

$$\langle \dot{\vec{p}}^2 \rangle = \frac{1}{2} \vec{E}^2 E_0^2 \frac{e^4}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\theta = \angle(\vec{p}, \vec{r}) \sim \vec{E}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2 \theta}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} E_0^2$$

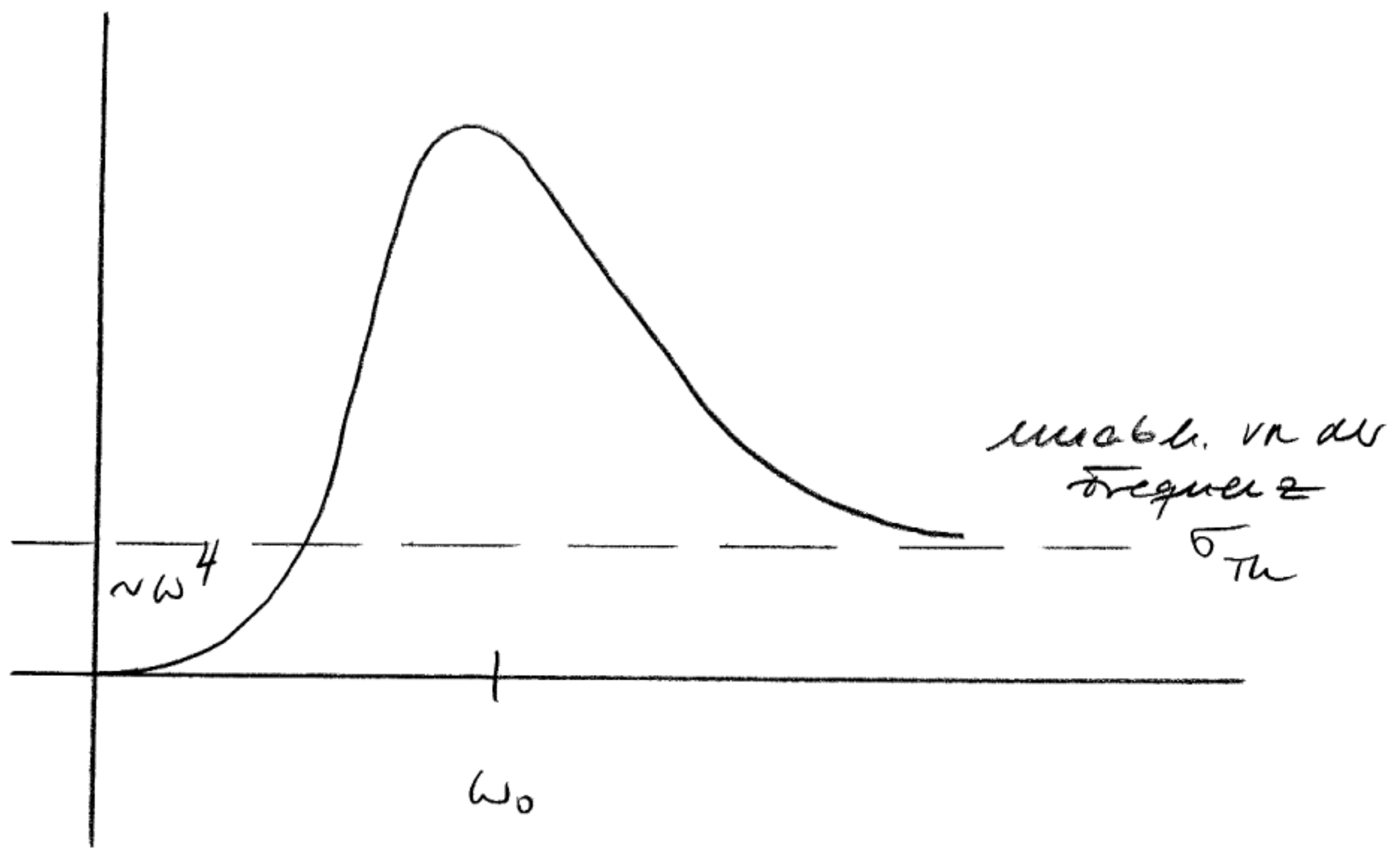
Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{gestr. Leistung pro } d\Omega}{\text{einfall. Leistung pro Fläche}} = \frac{dP/d\Omega}{\langle |\vec{S}| \rangle}$$

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \sin^2 \theta$$

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



$$\sigma_{th} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 = \pi R_0^2 \quad (\text{klass. WQ})$$

$$R_0 = 4.6 \text{ fm}$$

$$R_e = \frac{3}{5} \frac{e^2}{mc^2} \approx 1.7 \text{ fm}$$

a. Thomson Streuung

Grenzfall hoher Frequenzen $\rightarrow \omega_0$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}$$

$$\sigma_{Th} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \approx 0.665 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \text{ Elektronen}$$

i) Setzt man σ_{Th} mit der klassischen Streuung von Teilchen an einer Kugel mit Radius R_0

gleich 10 gibt $\sigma_{Th} = \pi R_0^2$;

$R_0 \approx 4.6 \text{ fm} = \mathcal{O}(R_e)$; $R_e = \frac{3e^2}{5mc^2}$
 ("Elektronenradius")

ii) Reulter an der klassischen ED verliert Gültigkeit für $\hbar\omega \sim mc^2$. Dann setzt Compton Streuung ein (Teilchencharakter der elem. Strahlung: Photonen)

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{el} \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \hbar\omega \gg mc^2$$

da inelastische Comptonstreuung!

\rightarrow Klein-Nishina Formel
 (quantenmed. Berechnung des WQ)

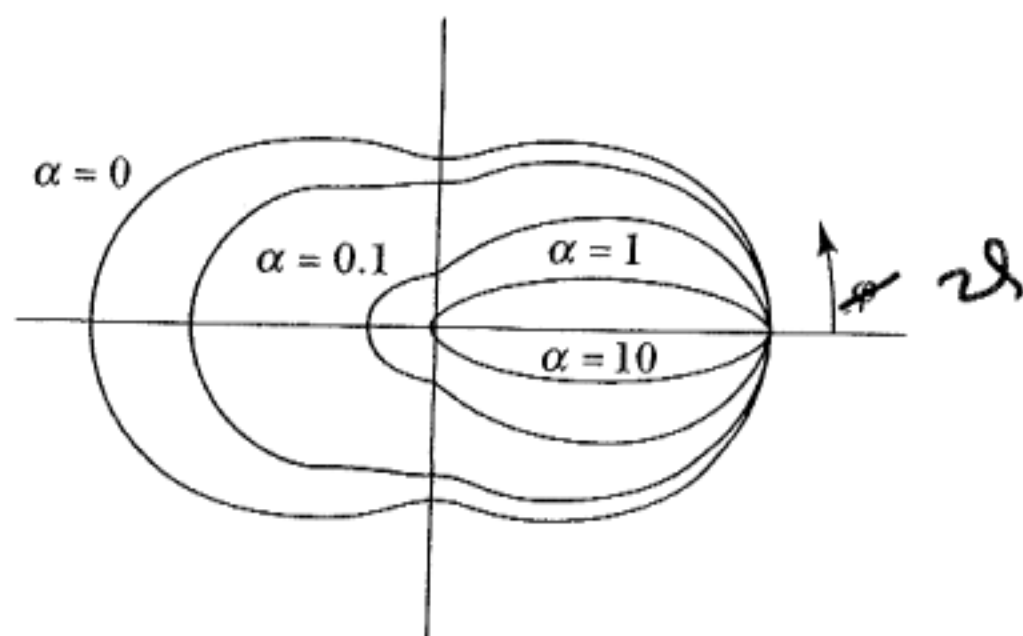


FIGURE 10-2. Angular dependence of Thomson-Compton scattering for various photon energies $\alpha = \hbar\omega/m_e c^2$.

(Head Man)

b. Rayleigh streuung

Grenzfall kleiner Frequenzen $\omega \ll \omega_0$

$$\sigma = \sigma_{Th} \cdot \frac{\omega^4}{\omega_0^4} \sim \omega^4$$

Da $t_{\text{visierbar}} / t_{\text{at}} \approx 0.1$ kann man diese Formel auf die Streuung von sichtbarem Licht an Atomen anwenden.

Die ω^4 -Abhängigkeit führt dazu, daß blaues Sonnenlicht in der Atmosphäre stärker als rotes gestreut wird.

$$\frac{\sigma_{\text{blau}}}{\sigma_{\text{rot}}} = \frac{\omega_{\text{blau}}^4}{\omega_{\text{rot}}^4} \approx 10$$

wobei wir $\omega_{\text{blau}} / \omega_{\text{rot}} = \lambda_{\text{rot}} / \lambda_{\text{blau}} \approx 1.8$ verwenden können.

Das Streulicht erhält also etwa zehnmal mehr blaues als rotes Licht. Daher erscheint der Himmel blau. Ein Sonnenuntergang kann dagegen rot erscheinen, weil der blaue Anteil durch die Streuung reduziert wurde.

c) Resonanzfluoreszenz

Bei $\omega = \omega_0$ hat der WQ ein Maximum der Stärke

$$\sigma_{\text{res}} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}$$

Dieser Grenzfall ergibt sich insbesondere dann, wenn Strahlung eines bestimmten Atomübergangs von einem Atom derselben Sorte wieder absorbiert wird.

Was ist γ ?

In Bohr'schem Atommodell gilt

$$a_B \approx 0,53 \text{ \AA} = \left(\frac{\hbar^2}{m e^2} \right)$$

$$v_{\text{at}} = \alpha \cdot c$$

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \quad \text{Strukturfeld-Konstante}$$

$$\omega_{\text{at}} \approx \frac{v_{\text{at}}}{a_B} = \frac{m e^4}{\hbar^3} \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ s}^{-1}$$

$$P \underset{\uparrow}{=} \frac{2}{3} \frac{e^2}{a_B} \alpha^3 \omega_{\text{at}}$$

abgezogene Dipolbestrahlung

Ohne Quantisierung, fortlaufende Energie abstrahlung!

$$\text{Bohr: } E_n = \frac{e^2}{a_B} \frac{1}{2n^2} = \frac{\hbar \omega_{\text{at}}}{2n^2}$$

$$n = 1, 2, \dots$$

$$E_{ar} = \hbar \omega_{ar} = \frac{e^2}{a_B} = \alpha^2 m c^2$$

$$\approx 27,2 \text{ eV}$$

Ein angeregter Zustand (mit Elektronenbahn $n \geq 2$) geht durch Abstrahlung eines Photons in einen niederen Zustand über. Dafür "benötigt" er die Zeit

$$\tau \sim \frac{E_{ar}}{P} \approx \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{\omega_{ar}}$$

Lebensdauer

$$\alpha^{-3} \approx 10^6$$

$$\omega_{ar} \approx 4 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$$

$$\tau \sim 10^{10} \text{ sec}$$

QM-Zerfallung $\hbar \omega_{un} \sim 2 \dots 3 \text{ eV}$
 $\tau \sim 10^{-8} \text{ s}$

$$\frac{\omega_0}{\gamma} \approx \frac{\omega_{ar}}{\gamma_{str}} = \frac{3}{2\alpha^3}$$

$$\left(\frac{e^2}{a_B} \right) / m c^2 = \alpha^2$$

$$\sigma_{th} = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2/a_B}{m c^2} \right)^2 a_B^2 \left(\frac{3}{2\alpha^3} \right)^2$$

$$= \frac{6\pi}{\alpha^2} a_B^2 = \pi R_0^2$$

$$R_0 \approx 3 \cdot 10^2 a_B$$

$10^5 \times$ größer als WR des Atoms

8.2. Elastische und inelastische Streuung an quasi-freier Ladungen

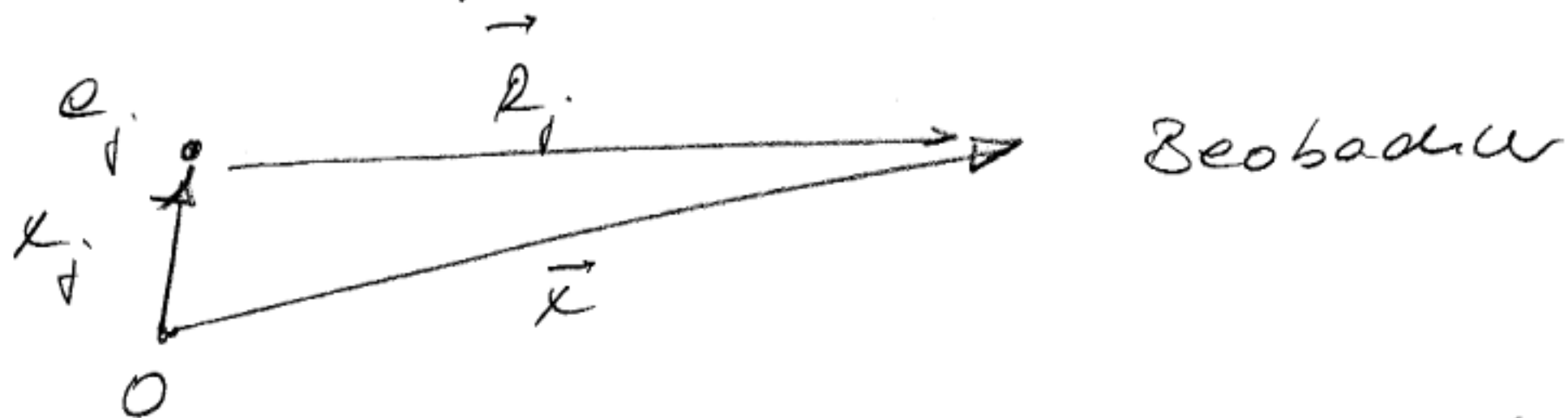
Wir betrachten in diesem Kapitel die Streuung von elem. Wellen an quasi-freier Ladungen, d.h. $\omega \gg$ atomare Frequenzen. Dies ist für die Streuung von Röntgenstrahlen an Atomen der Fall.

$$\text{Sei } \vec{E}(\vec{x}, t) = E_0 \vec{e} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

eine einfallende Welle mit Amplitude E_0 und Polarisation \vec{e} . Dann gilt für $v_j \ll c$ (nichtrel. Grenzfall) für die gestreute Welle

$$\vec{E}_s(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_j e_j \frac{1}{R_j} [\vec{n} \times (\vec{n} \times \dot{\vec{\beta}}_j)]_{\text{ret}}$$

wobei



$$\text{und } \dot{\vec{\beta}}_j = \frac{1}{c} \dot{\vec{v}}_j = \frac{e_j}{m_j c} E_0 \vec{e} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x}_j - \omega t)}$$

$$\leadsto \vec{E}_s(\vec{x}, t) = \frac{E_0}{c^2} (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{e}))$$

$$\sum_j \frac{e_j^2}{m_j} \frac{1}{R_j} \exp\left[i\left(\vec{k} \cdot \vec{x}_j - \omega\left(t - \frac{R_j}{c}\right)\right)\right]$$

Wir nähern nun

$$R_j = |\vec{x} - \vec{x}_j| \approx \underbrace{|\vec{x}|}_{=r} - \vec{n} \cdot \vec{x}_j$$

und erhalten

$$\vec{E}_s(\vec{x}, t) \approx \frac{E_0}{c^2} (\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E})) e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \frac{1}{r} \sum_j \frac{e_j^2}{m_j} e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j(t)}$$

wobei

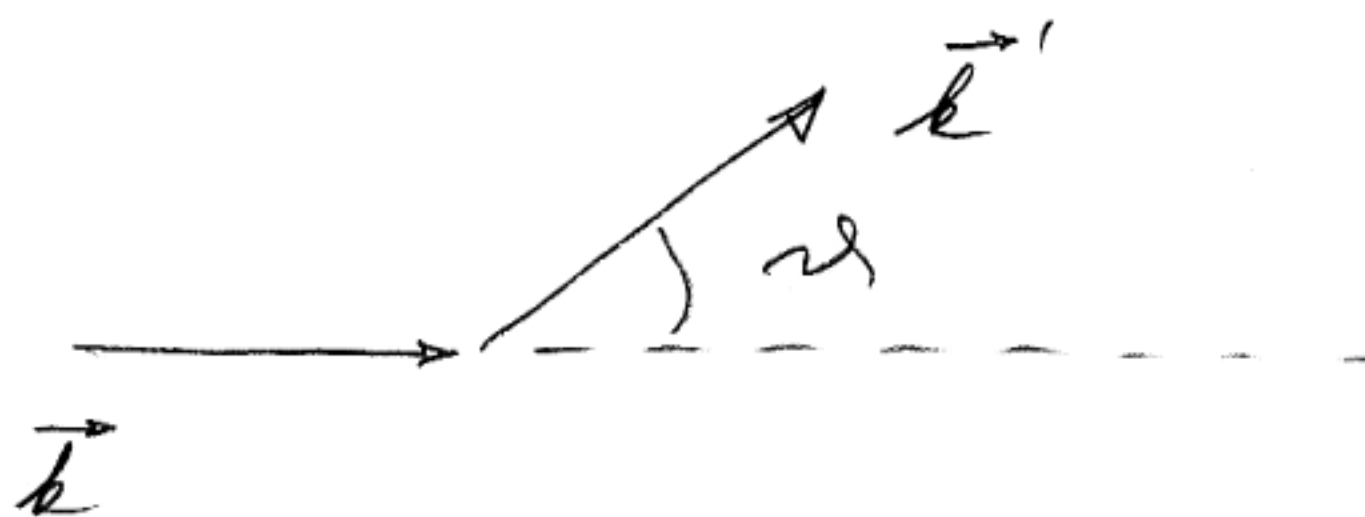
$$\vec{q} = \frac{\omega}{c} \vec{n} - \vec{k} = \vec{k}' - \vec{k}$$

der Streuvektor ist

Damit ergibt sich für den WQ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2 \sin^2 \theta$$

$$\theta = \angle(\vec{E}, \vec{n})$$



A. Kohärente und inkohärente Streuung

Der Wirkungsquerschnitt hängt stark von \vec{q} ab. Die Größenordnung der $|\vec{x}_j|$ ist gleich der Dimension a des Gesamtsystems: $|\vec{x}_j| \sim a$. Der Wirkungsquerschnitt ist sehr unterschiedlich in den Grenzfällen $qa \gg 1$ und $qa \ll 1$.



$$\vartheta = \angle(\vec{k}, \vec{n}) \quad \text{Streuwinkel}$$

$$q^2 = \left(\frac{\omega}{c} \vec{n} - \vec{k} \right)^2 = 2k^2 (1 - \cos \vartheta)$$

$$= 4k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$\boxed{q = 2k \sin \frac{\vartheta}{2}} \quad \text{Betrag des Streuvektors}$$

$$\underline{ka} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad qa \ll 1 \quad \forall \vartheta$$

$ka \ll 1$ qa ist nur in Vorwärtsrichtung
 $\vartheta < \vartheta_c \sim \frac{1}{ka}$ viel kleiner als 1
 und bei großen Winkeln schließlich
 viel größer als 1

$$\textcircled{qa \ll 1} \quad \leadsto \quad e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \approx 1$$

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{qa \ll 1} \approx \left| \sum_j \frac{e_j^2}{m_j c^2} \right|^2 \sin^2 \theta$$

Für ein Atom mit Z Elektronen hat man
 zu bestimmen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) \Big|_{qa \ll 1} \approx Z^2 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta$$

Die Wirkung der Z Elektronen ist also
 KOHÄRENT; Der DQ ist gleich Z^2
 mal dem 1-Teilchen Querschnitt,

Für $qa \gg 1$ sind die Exponenten sehr groß und haben sehr unterschiedliche Werte. Die schweren oszillierenden Kreuzterme im Quadrat der Summe werden sich deshalb zu Null mitteln. Nur die Diagonalterme bleiben übrig so dass gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \gg 1} \approx \sum_j \left(\frac{e_j^2}{m_j c^2} \right)^2 \sin^2 \theta$$

d. h. für Atome

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{qa \gg 1} \approx Z \left(\frac{e^2}{m c^2} \right)^2 \sin^2 \theta$$

In diesem Fall überlagern sich die Beiträge der einzelnen Elektronen kohärent

Quantenmechanik:

Thomas-Fermi-Modell

$$a \approx 1.4 a_B Z^{-1/3} \quad ; \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m e^2}$$

$$\lambda_c \sim Z^{1/3} / \omega \text{ (keV)}$$

Röntgenstreuung an Atomen

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \underbrace{\left| \sum_{j=1}^Z e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2}_{\equiv \text{Strukturfaktor}}$$

Mittelung über Positionen \vec{x}_j (QM):
 $w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z)$ bk. dichte

$$F^2(q) = \int \left| \sum_{j=1}^Z e^{i\vec{q} \cdot \vec{x}_j} \right|^2 w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) \prod_{k=1}^Z d^3x_k$$

= inelastischer Formfaktor

Dann lautet der gemittelte Querschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} F^2(q)$$

Diese allgemeine Form (bQ an Einzelsystem mal Formfaktor) ist für viele Streuprobleme charakteristisch. Sie kann dazu benutzt werden um aus den gemessenen bQ's etwas über die Struktur des Systems zu lernen.

$$F^2(0) = Z^2$$

Wir spalten den Formfaktor in diagonal und nicht-diagonalen Terme auf

$$F^2(q) = Z + Z(Z-1) P(q)$$

$$Z(Z-1) P(q) \equiv \sum_{i \neq j} \int e^{i\vec{q} \cdot (\vec{x}_i - \vec{x}_j)} w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) d^3x_i d^3x_j$$

wobei

$$w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = \int \prod_{k \neq i, j} d^3x_k w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_z)$$

die bk. verteilung für 2 Elektronen im.

$$\lim_{q \rightarrow \infty} P(q) = 0$$

(Riemann-Lebesgue Lemma)

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F^2(q) = Z$$

Wie erwartet

Für hohe Impulsüberträge und $\hbar\omega \gg$ atomare Anregungsenergien (tiefinelast. Bereich) wird also der Wk konstant und zwar gleich Z mal dem 1-Teilchen Wk.

Die bk. verteilung für 1 Elektron im

$$w_i(\vec{x}_i) = \int \prod_{k \neq i} d^3x_k w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_z)$$

Wir definieren die Korrelations c_{ij} durch

$$w_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) = w_i(\vec{x}_i) w_j(\vec{x}_j) + c_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j)$$

Dann im

$$Z(Z-1)P(q) = \sum_{i \neq j} F_i(q) F_j^*(q) + \sum_{ij} C_{ij}(q)$$

mit

$$F_i(q) = \int w_i(\vec{x}) e^{i\vec{q}\vec{x}} d^3x$$

$$C_{ij}(q) = \int c_{ij}(\vec{x}_i, \vec{x}_j) e^{i\vec{q}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} d^3x_i d^3x_j$$

$$\overline{\sum_j e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j}} = \int \prod_{k=1}^Z \frac{d^3 x_k}{\pi} \omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) \prod_{j=1}^Z e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j}$$

$$= \sum_{j=1}^Z F_j^*(\vec{q})$$

Also

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} F_{el}^2(q)$$

$$\text{mit } F_{el}^2(q) = \left| \sum_{j=1}^Z F_j(q) \right|^2$$

Diese elastischen Formfaktoren kann man folgendermaßen interpretieren. Die Ladungsdichte der Elektronen ist

$$\rho(\vec{x}) = e \sum_{j=1}^Z \delta(\vec{x} - \vec{x}_j)$$

und die zugehörige Mittelwert ist

$$\langle \rho \rangle(\vec{x}) = \int e \sum_{j=1}^Z \delta(\vec{x} - \vec{x}_j) \omega(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_Z) \prod_{k=1}^Z \frac{d^3 x_k}{\pi}$$

$$= e \sum_{j=1}^Z \omega_j(\vec{x})$$

Die Fourier transformierte dann ist

$$\langle \hat{\rho} \rangle(\vec{q}) = \int d^3 x e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}} e \sum_{j=1}^Z \omega_j(\vec{x})$$

$$= e \sum_j F_j(\vec{q})$$

Also ist

$$e^2 F_{el}^2(\vec{q}) = \left| \langle \hat{\rho} \rangle(\vec{q}) \right|^2$$

B. Elastische Strahlung

Für die Bestimmung des elastischen Strahlungsquerschnitts ist derjenige Teil der gestreuten Wellen auszuwählen, der die Frequenz ω hat. Der Ausdruck für das gestreute elem. Feld $\vec{E}_s(\vec{x}, t)$ hängt über den Faktor $e^{-i\omega t}$ und $\sum_j \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j)$ von der Zeit ab. Letztere Zeitabhängigkeit führt dazu, dass im Feld der gestreuten Wellen neben der Frequenz ω noch andere Frequenzen vorkommen.

Den Anteil zur Frequenz ω erhält man durch

$$\int dt e^{i\omega t} [e^{-i\omega t} \dots]$$

also durch zeitliche Mittelung über den Faktor $\sum_j \exp(-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j)$

Folglich ist der elastische Wirkungsquerschnitt

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th} \left| \overline{\sum_j e^{-i\vec{q} \cdot \vec{x}_j}} \right|^2$$

wobei der Quotient eine zeitliche Mittelung bedeutet.

Wir ersetzen das zeitliche Mittel durch ein Skalarprodukt über die Verteilungsfunktion $w(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_z)$; siehe Probstrecke und auch Vorlesung.

d.h. der elastische Formfaktor ist gleich dem Betrag quadrat der Fourier transformierten der mittleren Ladungsverteilung

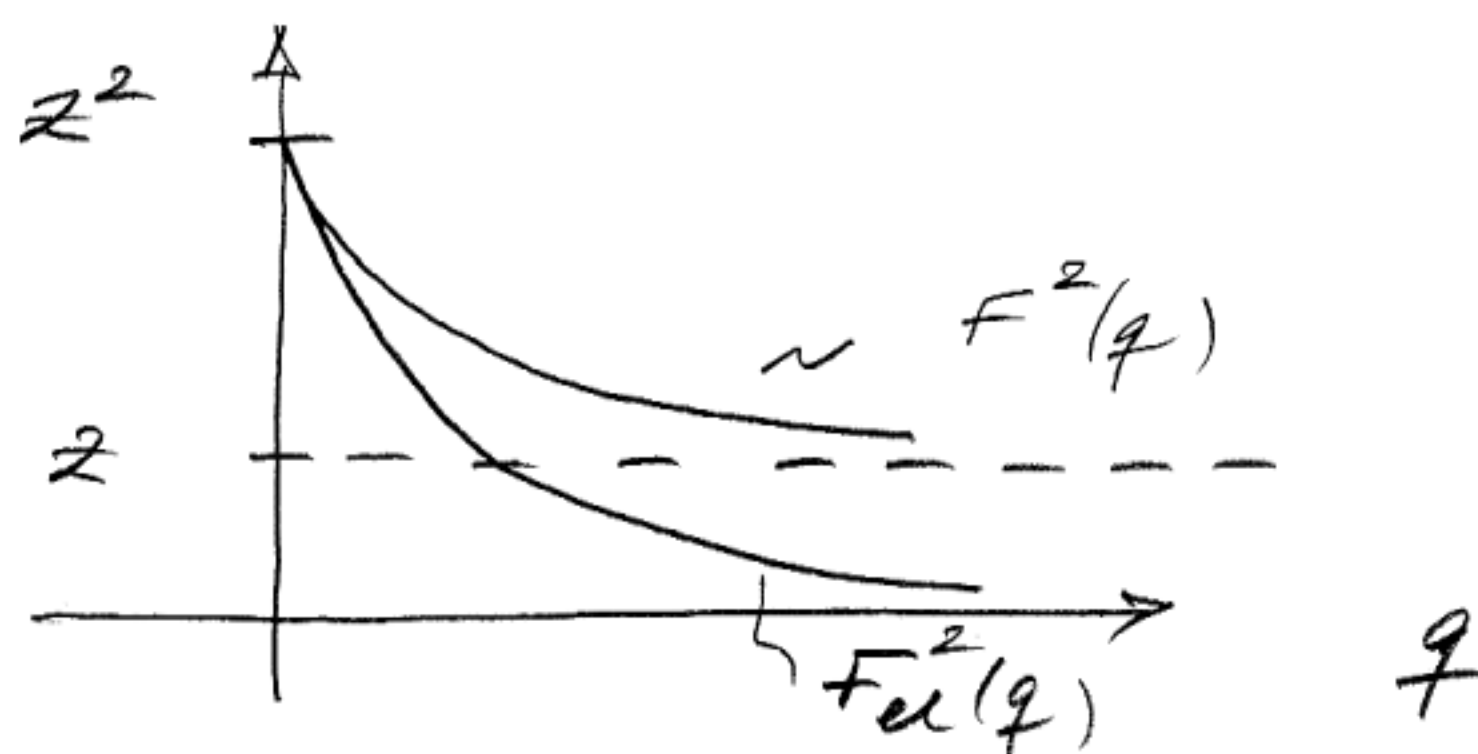
Im vorwärts wählung mit $q=0$ und damit $F_{el}(0) = 1 \quad \rightarrow$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{el} = z^2 \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Th}$$

weiter gilt (Riemann - Lebesgue Lemma)

$$\lim_{q \rightarrow \infty} F_{el}(q) = 0$$

Qualitativ gilt damit für die Formfaktoren



Zeigen auch, dass

$$z(z-1) P(q) = F_{el}^2(q) - \sum_{j=1}^z |F_j(q)|^2 + \sum_{i \neq j} C_{ij}(q)$$

ist. Verwendet man Korrekturen, so fällt der letzte Term weg und man hat

$$F^2(q) = F_{el}^2(q) + \left(z - \sum_{j=1}^z |F_j(q)|^2 \right)$$

Aus Streuexperimenten kann man also Informationen über den Aufbau der Kristalle bekommen. Die Gitterlänge der Probe muss klein sein als die

Dimension der Objekte; sonst müßte man
nur die Werte der Formfaktoren bei $q=0$
einsetzen.

§.3. Streuung in Gasen und Flüssigkeiten

In diesem Kapitel diskutieren wir die folgende
Fragestellung: Was ist die Streuung einer
ebene Welle an einer lokalisierten
Inhomogenität eines Dielektrikums?

Anwendungen sind

- (i) Streuung von Licht an Staubpartikeln der
Luft
- (ii) Streuung von Licht an Dichteschwankungen
in einem Gas (Lorentz-Theorie)

A. Allgemeine Theorie

$\mu=1$, keine Leitungs Ladungen
und Leitungsströme

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 & ; & \operatorname{rot} \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{B} = 0 \\ \operatorname{div} (\epsilon \vec{E}) &= 0 & ; & \operatorname{rot} \vec{B} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \vec{E} \end{aligned}$$

wobei $\vec{B}(\vec{x}, \omega)$ und $\vec{E}(\vec{x}, \omega)$ die
Felder im Frequenzraum sind.

Die physikalischen Sineha beschreiben wir
durch

$$\epsilon(\vec{x}, \omega) = \epsilon_0(\omega) + \epsilon_1(\vec{x}, \omega)$$

↓ homogene Medium

← Inhomogenität

Wir stellen die Felder durch Potenzen dar

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\frac{i\omega}{c} \vec{A} - \text{grad } \varphi$$

und verlangen (Eichung)

$$\text{div } \vec{A} - \frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \varphi = 0$$

Aus diesen Gleichungen folgt

$$\text{rot rot } \vec{A} = -\frac{i\omega}{c} \epsilon \vec{E}$$

$$\begin{aligned} (\text{grad div} - \Delta) \vec{A} &= -\frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \underbrace{\epsilon_1 \vec{E}}_{4\pi \vec{P}_1} \\ &= -\frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \vec{E} - \frac{i\omega}{c} \vec{A} - \text{grad } \varphi \end{aligned}$$

$\epsilon_1 \vec{E} = 4\pi \vec{P}_1$; \vec{P}_1 = zusätzliche Polarisierdichte der lokalisierten Inhomogenität

$$\nabla \left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0(\omega) \right] \vec{A} = \frac{4\pi i\omega}{c} \vec{P}_1$$

Die Gleichung für φ erhält man wie folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{div}(\epsilon \vec{E}) = \text{div}(\epsilon_0 \vec{E} + 4\pi \vec{P}_1) \\ &= \epsilon_0 \left(\underbrace{\frac{i\omega}{c} \text{div } \vec{A} - \Delta \varphi}_{-\epsilon_0 \frac{\omega^2}{c^2} \varphi} \right) + 4\pi \text{div } \vec{P}_1 \end{aligned}$$

$$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \right] \varphi = \frac{4\pi}{\epsilon_0} \text{div } \vec{P}_1$$

Nur die Gleichung

$$\vec{A} := -\frac{i\omega}{c} \epsilon_0 \vec{Z}$$

definieren wir den Hertz'schen Vektor nach der Eichbedingung gilt

$$\varphi = -\operatorname{div} \vec{Z}$$

so gilt für \vec{Z} die Gleichung

$$(\Delta + k^2) \vec{Z} = -\frac{4\pi}{\epsilon_0} \vec{P}_1 \quad (*)$$

wobei $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n_0^2(\omega)$; $n_0^2(\omega) \equiv \epsilon(\omega)$.

Die elem. Felder ergeben sich aus \vec{Z}

$$\vec{B} = -i \frac{\omega}{c} \epsilon_0 \operatorname{rot} \vec{Z}$$

$$\vec{E} = k^2 \vec{Z} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{Z}$$

Wir verwandeln nun die Gleichung (*) in eine Integralgleichung. Dabei muss man beachten, dass die rechte Seite eine Funktion von \vec{z} ist: $\vec{P}_1 = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \vec{E}$.

Die Green'sche Funktion für

$$(\Delta + k^2) G = \delta$$

kennen wir bereits (Helmholtz Gleichung)

$$\vec{Z}(\vec{x}) = \vec{Z}^{(0)} + \frac{1}{\epsilon_0} \int d^3x' \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} e^{ik|\vec{x}-\vec{x}'|} \vec{P}_1(\vec{x}')$$

wobei $\vec{Z}^{(0)}$ die einfallende Welle ist.

Der zweiten Term, $\vec{Z}^{(s)}$, bedient man sich
Streu Feld.

In großer Abstände R von der \vec{r} -homogenität gilt

$$\vec{Z}^{(s)}(\vec{x}) = \frac{e^{ikR}}{R} \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{P}_1(\vec{x}') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} d^3x'$$

$$\text{mit } \vec{k}' = k \cdot \vec{n}; \quad \vec{n} = \vec{R}/|\vec{R}|$$

Die Streufelder ergeben sich zu

$$\vec{B}^{(s)} = \frac{k^2}{n_0} \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n} \times \vec{P}_1(\vec{k}')$$

$$\begin{aligned} \vec{E}^{(s)} &= \frac{k^2}{n_0^2} \frac{e^{ikR}}{R} (\vec{n} \times \vec{P}_1(\vec{k}')) \times \vec{n} \\ &= \frac{1}{n_0} \vec{B}^{(s)} \times \vec{n} \end{aligned}$$

$$\text{mit } \vec{P}_1(\vec{k}') = \int \vec{P}_1(\vec{x}') e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{x}'} d^3x'$$

Führt man den Zeitfaktor $e^{-i\omega t}$ wieder
dazu, so gilt

$$\vec{B}^{(s)} = \frac{1}{R} \frac{k^2}{n_0} \vec{n} \times \vec{P}_1(\vec{k}', t_{\text{ret}})$$

$$\vec{E}^{(s)} = \frac{1}{n_0} \vec{B}^{(s)} \times \vec{n}$$

$$\text{wobei } t_{\text{ret}} = t - \frac{R}{c/n_0}$$

$$\text{Wir verwenden } \nabla \left(\frac{e^{ikR}}{R} \right) \equiv ik \frac{e^{ikR}}{R} \vec{n}$$

Für Term, der man nur für die Polarisation
 der auslaufenden Wellen in Richtung von
 \vec{E}' (nur $\vec{E}' \cdot \vec{n} = 0$) so hat man
 $\vec{E}' \cdot \vec{E}^{(s)}$ zu berechnen.

$$\vec{E}' \cdot \vec{E}^{(s)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{k^2}{n_0} \vec{E}' \cdot \vec{P}_1$$

Der zugehörige Poynting Vektor ist

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} n_0 |\vec{E}' \cdot \vec{E}^{(s)}|^2 \vec{n}$$

$$= \frac{1}{R^2} \frac{c}{4\pi} n_0 \left(\frac{k^2}{n_0}\right)^2 |\vec{E}' \cdot \vec{P}_1|^2 \vec{n}$$

Die zeitlich gemittelte Intensität der
 gehen in Wellen ist dann

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \langle |\vec{E}' \cdot \vec{P}_1|^2 \rangle$$

B. Streuung von langen Wellen

$L \gg$ System dimensionen

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}'} \approx 1 \quad (\text{Dipolnäherung})$$

$$\nearrow \frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \frac{k^4}{n_0^3} \langle |\vec{E}' \cdot \vec{p}|^2 \rangle$$

$$\vec{p} = \int \vec{P}_1(\vec{x}') d^3 x'$$

Dipolmoment der Inhomogenität

$$\text{Oder } n_0(\omega) \approx n_0(0)$$

$$\frac{dI}{d\Omega} \sim k^4 \sim L^{-4}$$

Beispiel

Streuung an einer dielektrischen Kugel
mit Radius a . Da $\lambda \gg a$ darf man
 \vec{p} statisch berechnen.

$$\vec{p} = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} a^3 \vec{E}^{(0)}$$

$\vec{E}^{(0)}$ einfallendes elektr. Feld

ϵ DK der Kugel

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = k^4 a^6 \left| \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right|^2 |\vec{E}' \cdot \vec{E}|^2$$

\vec{E} : Polarisationsvektor der einfallenden Welle

\vec{E}' : gestreuter Welle

C. Bornsche Näherung

Wenn man in der Integralgleichung auf der rechten Seite die Ersetzung

$$\vec{P}_1 = \frac{\epsilon_1}{4\pi} \vec{E}(\vec{x}') \rightarrow \frac{\epsilon_1}{4\pi} \vec{E}^{(0)}(\vec{x}')$$

vorwählt, d.h. die Rückwirkung der Streufelder vernachlässigt, spricht man von der Bornschen Näherung

Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{P}_1(\vec{k}') &= \int d^3x' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{x}'} \frac{\epsilon_1}{4\pi} \underbrace{\vec{E}^{(0)}(\vec{x}')}_{\vec{E} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)} E_0} \\ &= \frac{1}{4\pi} \tilde{\epsilon}_1(\vec{k}' - \vec{k}) E_0 \vec{E} \end{aligned}$$

ebener Wellen

Wirkung quer durch

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{BORN}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 |\vec{E}' \cdot \vec{E}|^2 |\tilde{\epsilon}_1(\vec{k}' - \vec{k})|^2$$

- +) Der Energiefluss der einfallenden Wellen mit dem Betrag $u_{\text{max}} = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0 |\vec{E}^{(0)}|^2 = \frac{1}{2} \frac{c}{4\pi} n_0 E_0^2$; da zeitliche Mittelwerte oberhalb einen Faktor $\frac{1}{2}$.

Dipolnäherung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 |\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}'|^2 \left| \int \varepsilon_1(\vec{x}') d^3x' \right|^2$$

Integriere über alle Raumrichtungen

$$\sigma = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 n_0^2 \left| \int \varepsilon_1(\vec{x}') d^3x' \right|^2.$$

9. Beugung (Skalare Theorie)

- Abweichung der Lichtausbreitung vom Strahlengang der geometrischen Optik
z. B. Licht kann in den geometrischen Schatten eindringen ("um die Ecke biegen").

Mathematische Problemstellung

Lösen die Wellengleichungen für \vec{E} und \vec{B} zu vorgegebenen Randbedingungen an den Oberflächen des Objekts, das die Beugung verursacht. Diese Problem kann nur in wenigen Fällen exakt gelöst werden*).

Hier betrachten wir daher nur die skalare Beugungstheorie. Blaue man sich wieder für Polarisationseffekte interessiert ist diese Näherung auch gerechtfertigt, da jede kartesische Komponente der Vektorfelder die Wellengleichung erfüllt. Weiter vernachlässigt man dann auch Effekte, die nur den nicht strahlenden Feldern nahe der Oberfläche des beugenden Objekts liegen.

*) A. Sommerfeld, Bd IV Optik, Harri
Deutsch Verlag, § 38.

Die skalare Beugungstheorie ist dann eine gute Näherung, wenn der Beobachtungspunkt einige Wellenlängen vom beugenden Objekt entfernt ist, und unter sog. paraxialen Bedingungen, unter denen Polarisierungseffekte minimal sind. Die Theorie der skalaren Beugung gilt streng für akustische (Druck) Wellen in einem homogenen Medium.

Annahme: Alle Information, die für die Berechnung der Intensität elem. Strahlung an einem bestimmten Raumpunkt notwendig ist, ist in einer skalaren Wellenfunktion $\underline{\psi}(\vec{r}, t)$ enthalten; $\underline{\psi}(\vec{r}, t)$ spezifiziert die Amplitude und Phase der Welle. Falls man monochromatisches Licht vorliegen hat, so gilt

$$\underline{\psi}(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

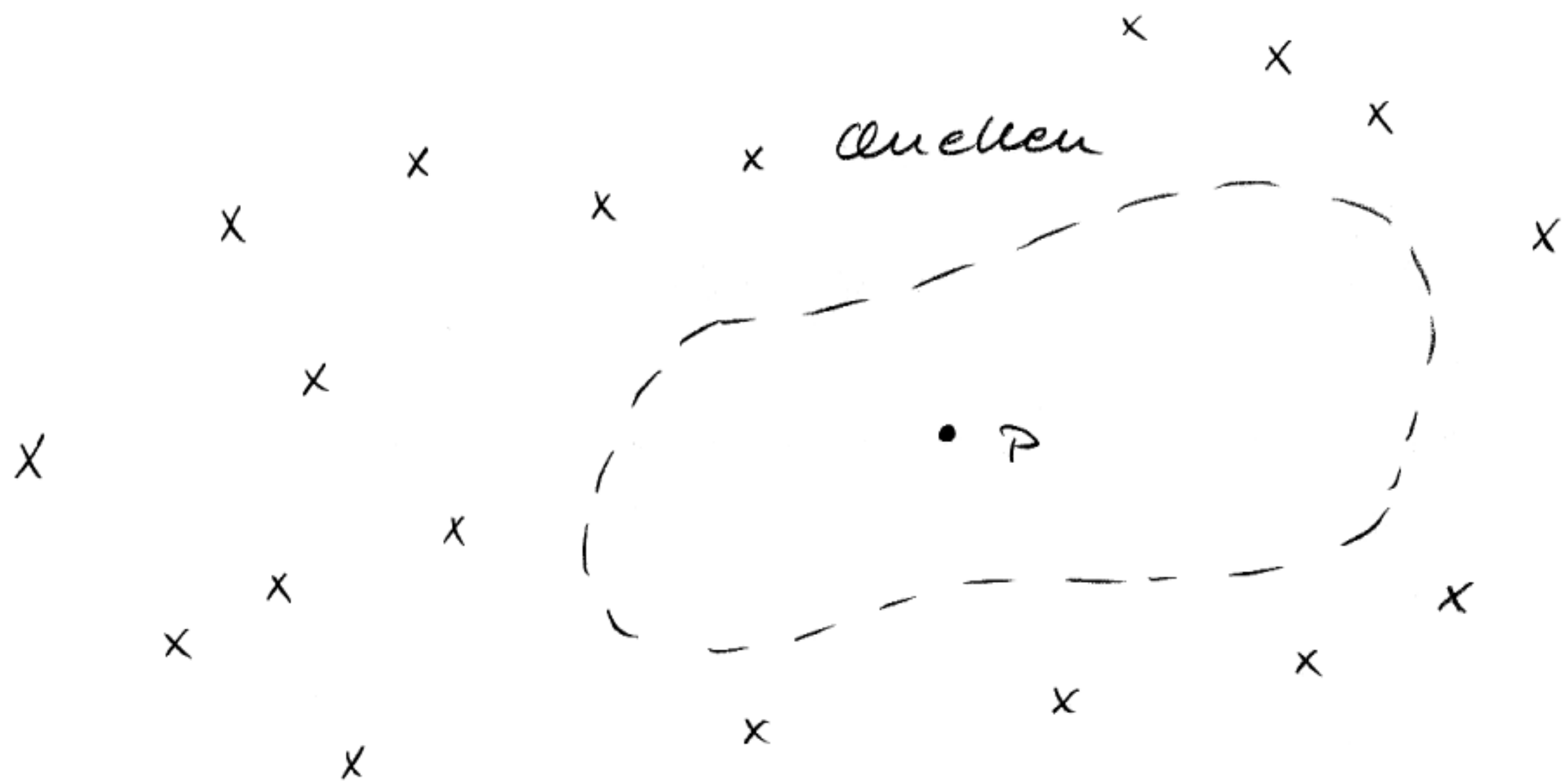
$$\text{Intensität} \sim |\psi(\vec{r})|^2$$

Die Wellengleichung reduziert sich dann auf die Helmholtzgleichung

$$(\Delta + k^2) \psi = 0$$

$$\text{mit } k = \frac{\omega}{c}.$$

9.1. Das Helmholtz-Kirchhoff-Integral



Um die Amplitude $\psi(P)$ der elem. Welle an einem Punkt P zu berechnen, das von einer Zahl von Quellen herührt, ist es ausreichend die Amplituden und Phasen der von diesen Quellen ausgehenden elem. Wellen zu kennen. Das Feld am Punkt P ergibt sich aus einer Summe über diese Beiträge (lineare Superposition).

Alternativ kann man das Feld auch aus einer Spezifikation der gesamten Wellenfunktion auf einer Oberfläche gewinnen, welche den Punkt P einschließt, aber keine Ladungen (siehe die gestrichelte Kurve in obiger Abbildung). Dieser Ansatz ist für die Berechnung von Beugungseffekten aufgrund von opaquen Schirmen mit Öffnungen besser geeignet.

$\psi(\vec{r})$ genügt der Helmholtz Gleichung

$$\left[(\Delta + k^2) \psi(\vec{r}) = 0 \quad ; \quad k = \frac{\omega}{c} \right]$$

Betrachte nun eine weitere Funktion $\chi(\vec{r})$,
der wir noch keine physikalische Bedeutung
zuschreiben, die auch der Helmholtz Gleichung
genügt

$$(\Delta + k^2) \chi(\vec{r}) = 0$$

Nach dem 2. Green'schen Satz gilt

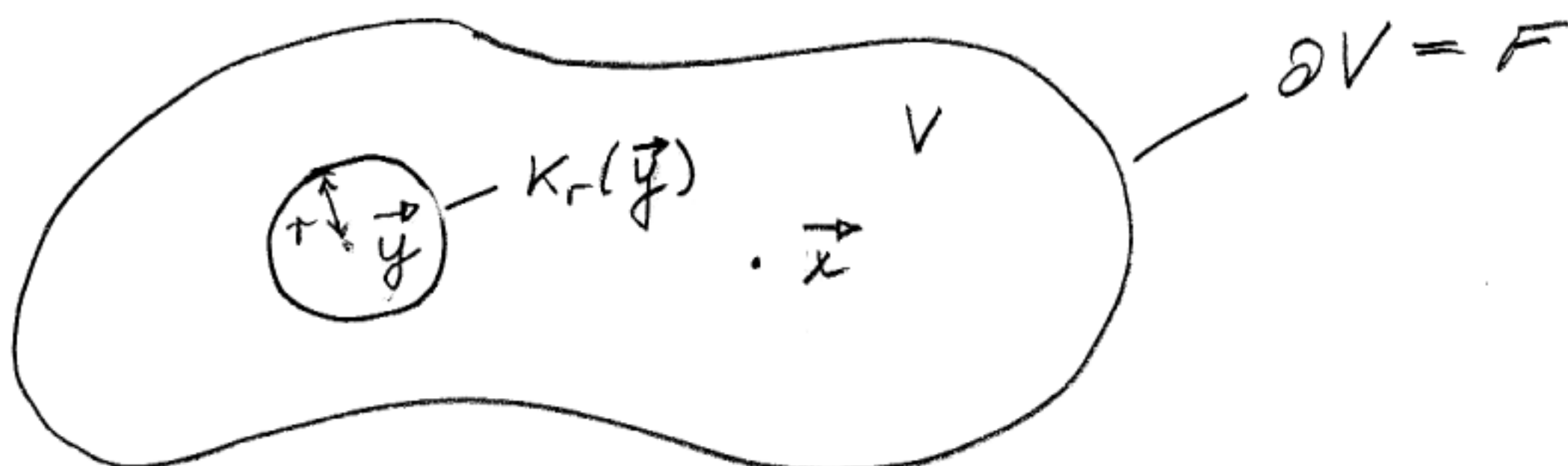
$$\int_V (\psi \Delta \chi - \chi \Delta \psi) dV = \int_{\partial V} \left(\psi \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dF$$

für ein Gebiet V mit Rand ∂V .

Wir setzen nun χ gleich der Green'schen
Funktion für die Helmholtz Gleichung

$$\chi = G(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\exp(ik|\vec{x} - \vec{y}|)}{|\vec{x} - \vec{y}|}$$

und spawn bei $\vec{y} \in V$ eine kleine Kugel
aus (\rightarrow Skizze), die den Radius r hat.



Dann verwendet man die linke Seite der
2. Green'schen Identität identisch.

Auf dieser Kugel $K_r(\vec{y})$ gilt:

$$-\frac{\partial \chi}{\partial n} = \frac{\partial \chi}{\partial r} = \left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right) e^{ikr}$$

(Beachte, daß die Normale \vec{n} auf dem Rand von V in $K_r(\vec{y})$ hinein zeigt
 $\sim \frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial r}$)

Da weiter $df = r^2 d\Omega$ folgt im
Limes $r \rightarrow 0$

$$\int_{\partial V} \left(4 \frac{\partial \chi}{\partial n} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) df =$$

$$= - \int r^2 d\Omega \left[4 \left(\frac{1}{r^2} - \frac{ik}{r} \right) e^{ikr} - \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right]$$

$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$
 $0 \qquad \qquad \qquad 0$

($r \rightarrow 0$)
 $\rightarrow -4\pi \psi(\vec{y})$.

In einem ~~konkreten~~ ~~Beugungsproblem~~ wird ein Teil von ∂V im Unendlichen liegen. Wir verlangen, daß die Lösung ψ des Beugungsproblems nur asymptotisch auslaufende Wellen hat, d.h. $\psi \sim \frac{1}{r} e^{ikr}$ (und nicht $\frac{1}{r} e^{-ikr}$) asymptotisch für große r . Dann gilt

$$\left(\chi \frac{\partial \psi}{\partial r} - \psi \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) r^2 d\Omega \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty.$$

Daß man nun nur über die endlichen Teile der Oberfläche interpretieren.

$$\phi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_F \left[G(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{y}) \right] \vec{n} \cdot d\vec{f}$$

"
 P

≡ Helmholtz - Kirchhoff - Integral

$\vec{y} = P$; \vec{x} liegt auf F

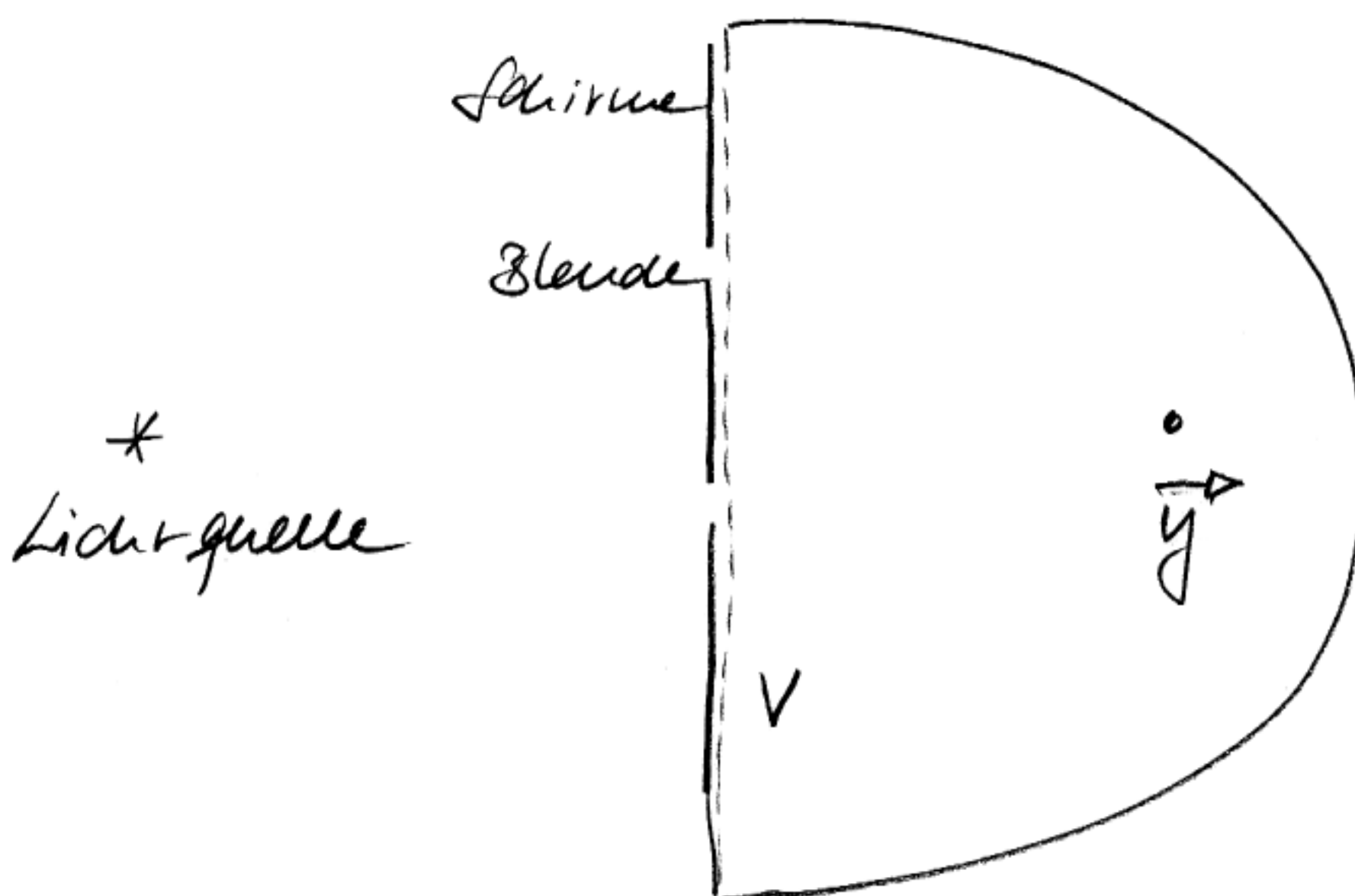
Diese exakte Relation drückt die gesuchte Funktion $\phi(\vec{y})$ durch die Randwerte von ϕ und $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ aus, und stellt natürlich keine Lösung des Problems dar, sondern nur wie schon bei den elektrost. Randwertproblemen eine Integralgleichung!

9.2. Die Kirchhoff'sche Näherung

Das Beugungsproblem besteht darin, daß man die Auswirkungen von (undurchsichtigen) Schirmen und Blenden auf die Lichtausbreitung bestimmen möchte. Der ganze Raum außerhalb des Materials des Schirms ist von der Lichterzeugung ϕ erfüllt zu denken, die der Helmholtzgleichung genügt und in den Lichtquellen gewisse Singularitäten aufweist. Die Art dieser Singularitäten ist zunächst unbekannt, ebenso wenig aber auch der genaue Einfluß der Schirme, d.h. die Grenzbedingungen, denen die Funktion ϕ an der

Oberfläche der Schirme zu geringen her.
 Es zeigt na allerdings, daß die Beugungs-
 enderungen sehr unempfindlich auf die
 plupikae. Bedenken der Schirme sind.
 Wäre beide bekannt, so hätte man ein
 Randwertproblem für die Wellengleichung
 mit vorgegebenen Singularitäten gegeben.

Kirchhoff ging von der Tatsache aus, daß
 bei grober Beobachtung das Licht sich
 von der Quelle bis zu dem Schirmen
 ungestört ausbreitet und eine Werte
 enge Blenden ein Einfluß der Schirm-
 wände bemerkbar ist.



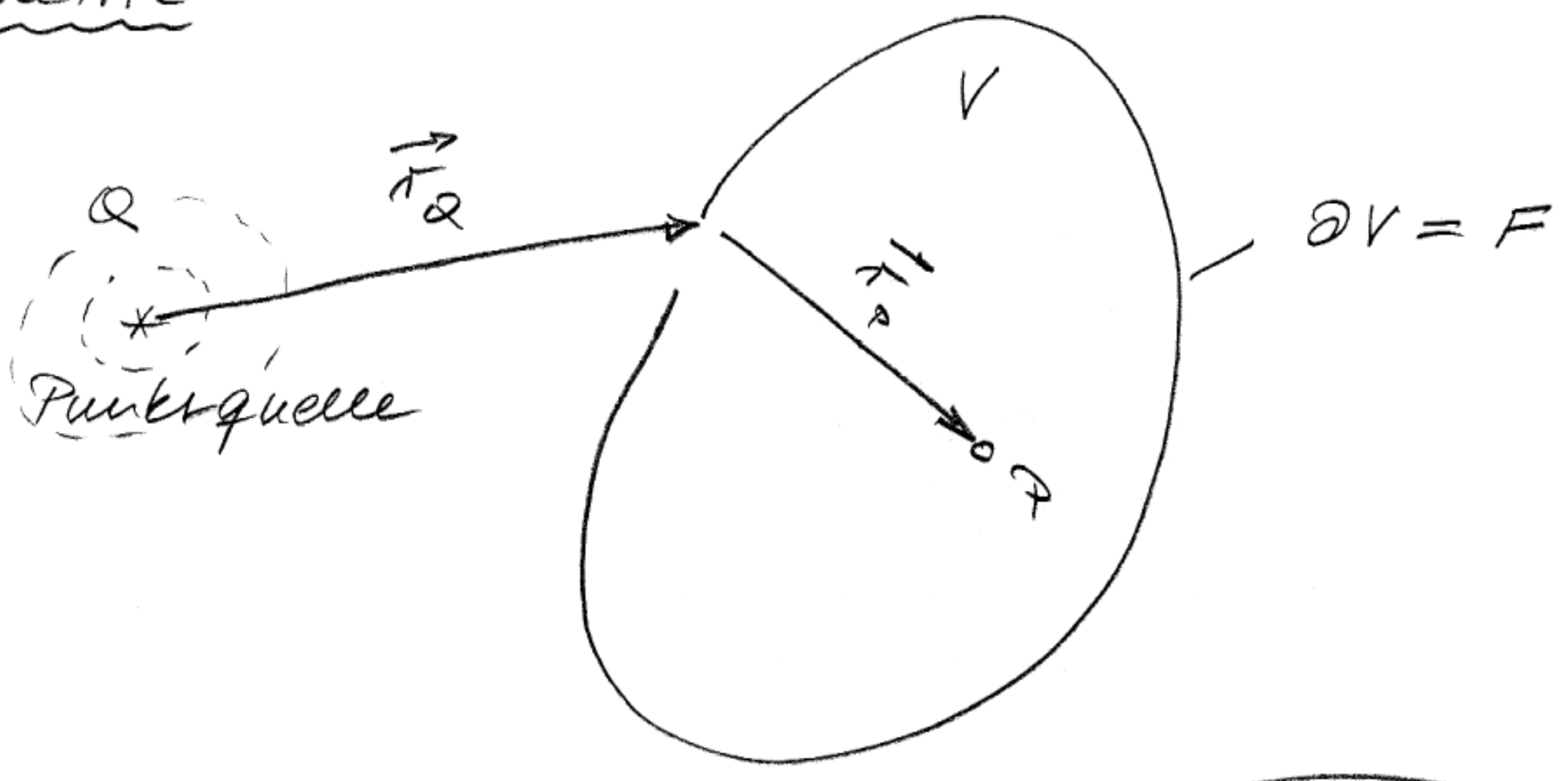
- 2) $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$ in 1. Nhrq auf Rückseite der Schirme
- Für Teile der Fläche ∂V , die Blenden überspannen, nehmen als Randwerte die Werte der ungestörten Lichtausbreitung $\psi = \psi^0$) $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi^0}{\partial n}$ Blende

Verfaundet man Solime und Öffnungen
(komplementäre Anordnung), so erfüllen
die zugehörigen Lösungen φ und $\bar{\varphi}$
(- = Lösung zu komplementärer Anordnung)

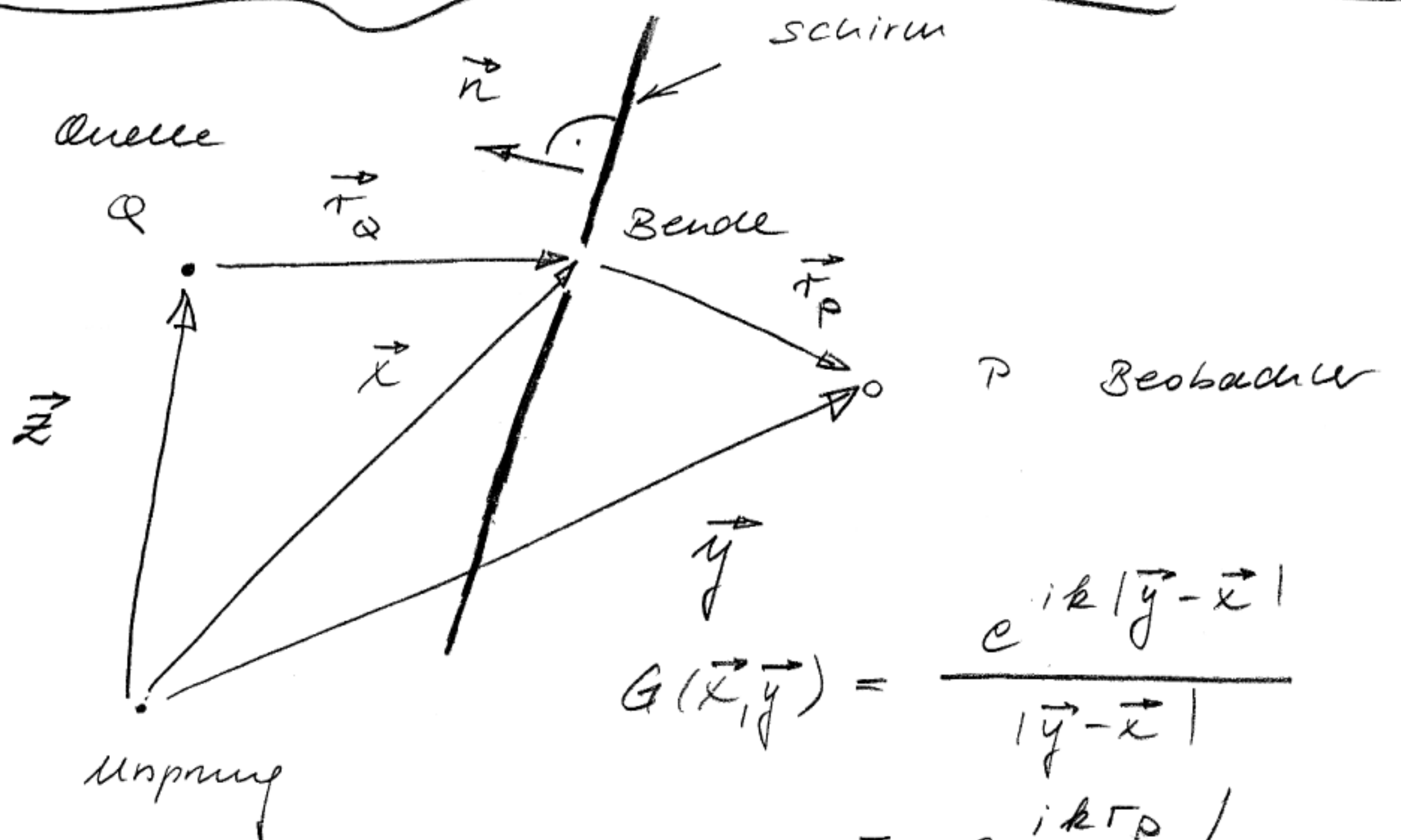
$$\varphi + \bar{\varphi} = \varphi^0$$

= Babinet'sches Prinzip.

Geometrie



$$\phi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \oint_F \left(G(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) - \phi(\vec{x}) \vec{\nabla} G(\vec{x}, \vec{y}) \right) d\vec{f}$$



Kirchhoff'sche Annahmen

- (1) $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ auf Rückseite der Schirme
- (2) $\phi = \phi^0 = A \exp(ik|\vec{r}_Q|) / r_Q$
 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi^0}{\partial n}$
 auf Blende

Mit den Kirchhoff'schen Näherungen
 kanziert man die Integralgleichung in der
 Helmholtz-Kirchhoff'schen Integralgleichung
 auf eine Integralgleichung über die
 Blenden (Öffnungen), wobei außerdem
 φ durch die von Punkt Q ausgehende
 ungestörte Welle ersetzt wird.

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_B [G \nabla \varphi^0 - \varphi^0 \nabla G] d\vec{f} \quad (1)$$

Die Helmholtz-Kirchhoff-Gleichung gilt
 auch für φ^0 , d.h.

$$\varphi^0(\vec{y}) = \frac{1}{4\pi} \int_F [G \nabla \varphi^0 - \varphi^0 \nabla G] d\vec{f} \quad (2)$$

Teile man das Integral über F auf

$$\int_F = \int_S + \int_B \quad \begin{array}{l} S = \text{Schirm} \\ B = \text{Blende} \end{array}$$

(1), (2)

$$\begin{aligned} \rightarrow \varphi(\vec{y}) &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{4\pi} \int_B \dots = \frac{1}{4\pi} \left(\int_F \dots - \int_S \dots \right) = \\ &\stackrel{(2)}{=} \varphi^0(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_S [G \nabla \varphi^0 - \varphi^0 \nabla G] d\vec{f} \end{aligned}$$

Eine äquivalente Form der Kirchhoff-Näherung lautet
 also

$$\varphi(\vec{y}) = \varphi^0(\vec{y}) - \frac{1}{4\pi} \int_S [G \nabla \varphi^0 - \varphi^0 \nabla G] d\vec{f} \quad (1)'$$

Mit den Kirchhoff Annahmen wird somit
an dem Helmholtz - Kirchhoff Integral

$$\varphi(\vec{y}) = \frac{A}{4\pi} \int_{\text{Blende}} \left(\frac{e^{ikr_p}}{r_p} \vec{\nabla} \frac{e^{ikr_q}}{r_q} - \frac{e^{ikr_q}}{r_q} \vec{\nabla} \frac{e^{ikr_p}}{r_p} \right) d\vec{f}$$

Für die Auswertung des Integrals wollen wir annehmen daß sowohl Quellpunkt Q als auch Beobachtungspunkt P einen Abstand zur Blende haben, der groß im Vergleich zur Wellenlänge λ ist.

*) $r_p, r_q \gg \lambda$

$$\varphi(\vec{y}) = ik \frac{A}{4\pi} \int_B \frac{e^{ik(r_p+r_q)}}{r_p r_q} (\hat{e}_q - \hat{e}_p) \cdot \vec{n} d\vec{f}$$

Fresnel Kirchhoff'sche
Biegungsintegral

$$\hat{e}_q = \frac{\vec{r}_q}{r_q}; \quad \hat{e}_p = \frac{\vec{r}_p}{r_p}$$

*) Nebenrechnungen:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{\nabla}_x \frac{e^{ikr_q}}{r_q} &= \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_q}{r_q} \left(ik - \frac{1}{r_q} \right) \frac{e^{ikr_q}}{r_q} \\ &\approx \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}_q}{r_q} (ik) \frac{e^{ikr_q}}{r_q} \end{aligned}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{r}_q = -r_q \cos \Theta_q$$

Θ_q = Einfallswinkel zum Lot auf Blende
(Beobachtung Richtung der Normalenvektor)

Im Vergleich zu der schnell oszillierenden Exponentialfunktion kann man den Winkelanteil $(\hat{e}_Q - \hat{e}_P) \cdot \vec{n} = -(\cos \theta_Q + \cos \theta_P)$ praktisch als konstant annehmen. Hierbei tritt Beugung nur in der Nähe der Schellenperze auf.

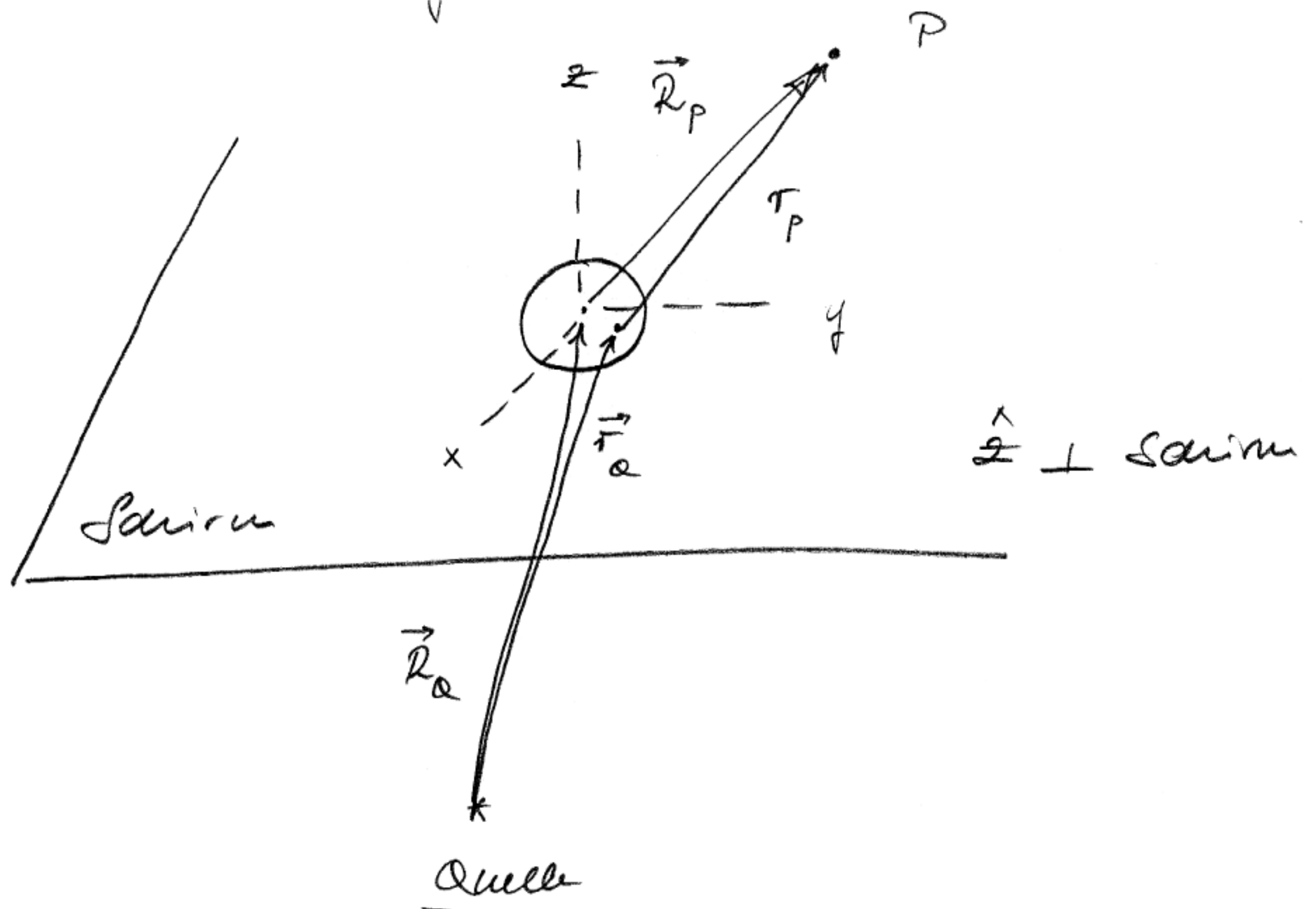
Im folgenden ersetzen wir $\frac{1}{2}(\cos \theta_Q + \cos \theta_P)$ durch einen mittleren Wert $\cos \delta$, und ebenso $\frac{1}{r_P r_Q}$ durch einen mittleren Wert $1/R_P R_Q$. Damit wird der Ausgangspunkt der Rechnung

$$\psi(\vec{y}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos \delta \frac{1}{R_P R_Q} \int_B e^{ik(r_P + r_Q)} df$$

Huygensches Prinzip: Von jedem Punkt der Öffnung geht eine Kugelwelle $\frac{1}{r_P} e^{ikr_P}$ aus. Ihre Stärke und insbesondere ihre Phase wird von einer einfallenden Kugelwelle $A \frac{1}{r_Q} e^{ikr_Q}$ bestimmt.

(Das Fresnel - Kirchhoff Integral liefert eine Begründung des Huygenschen Prinzips aus der Elektrodynamik)

Ebene Öffnung



(ξ, η) variabler in Öffnung

$$r = r_P$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2$$

$$r' = r_Q$$

$$(r')^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 + z'^2$$

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$R'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

Also $r^2 = R^2 - 2(x\xi + y\eta) + \xi^2 + \eta^2$

$$r'^2 = R'^2 - 2(x'\xi + y'\eta) + \xi^2 + \eta^2$$

Verwende $\sqrt{1 + \varepsilon^2} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \frac{1}{8}\varepsilon^4 + \dots$

↙

$$r = R - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} + \dots$$

$$r' = R' - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots$$

Einsetzen ergibt dann

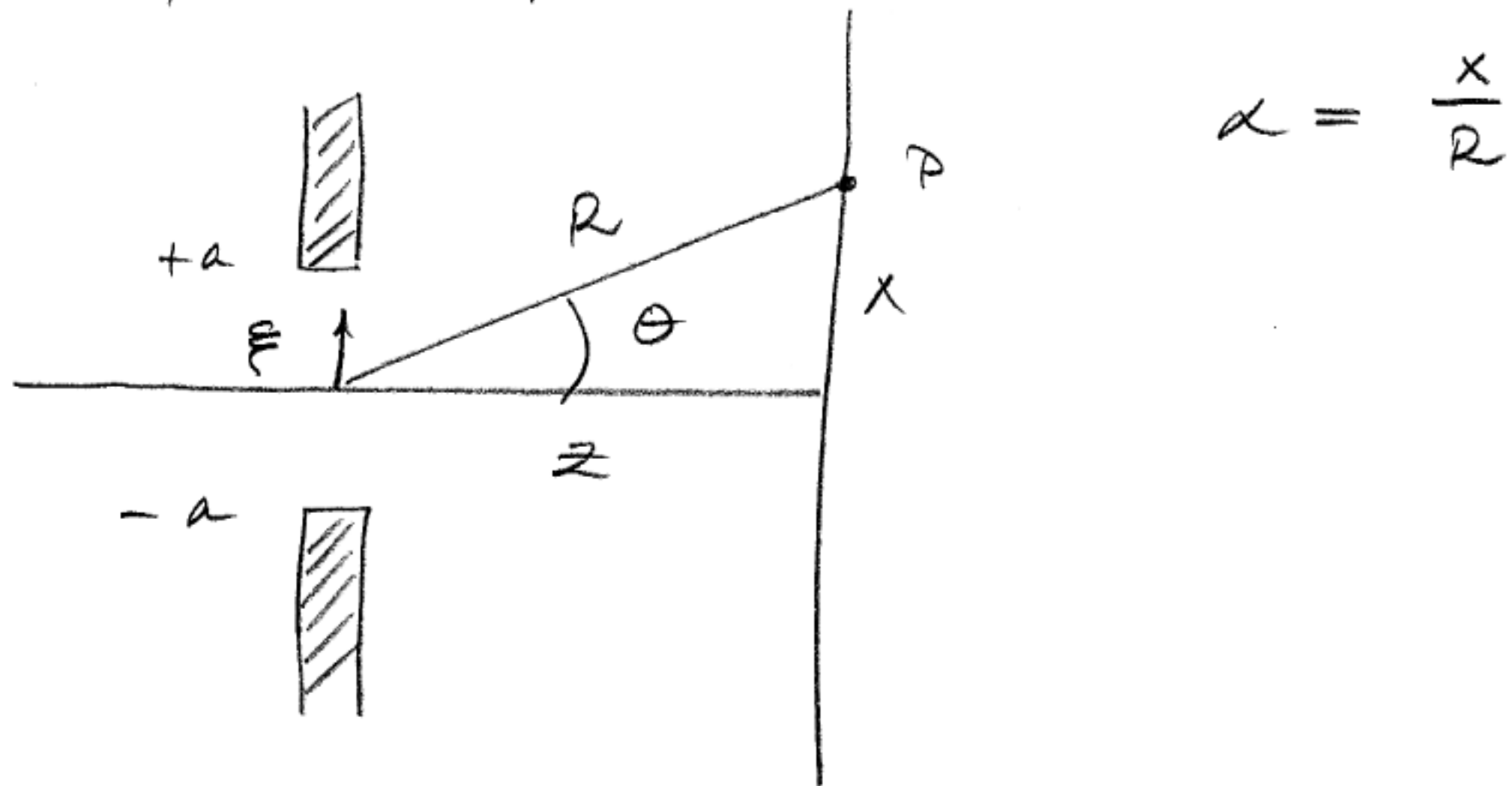
$$\varphi(\vec{y}) = A \frac{k}{2\pi i} \cos \delta \frac{e^{ik(R+R')}}{RR'} \int e^{ik\phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta$$

Wobei

$$\phi(\xi, \eta) = - \frac{x\xi + y\eta}{R} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R} - \frac{(x\xi + y\eta)^2}{2R^3} - \frac{x'\xi + y'\eta}{R'} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2R'} - \frac{(x'\xi + y'\eta)^2}{2R'^3} + \dots$$

Beispiele

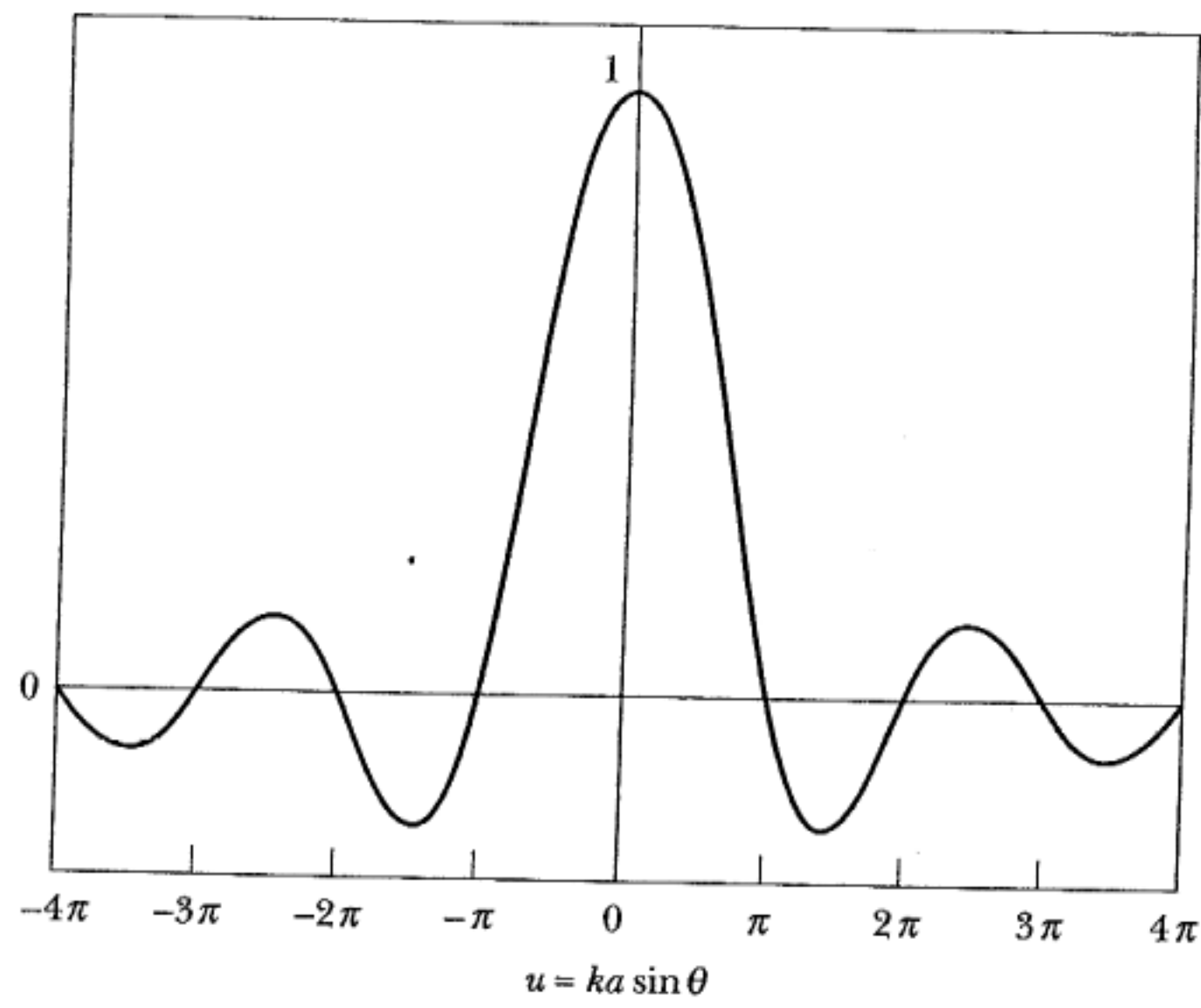
(a) Einfacher Spalt



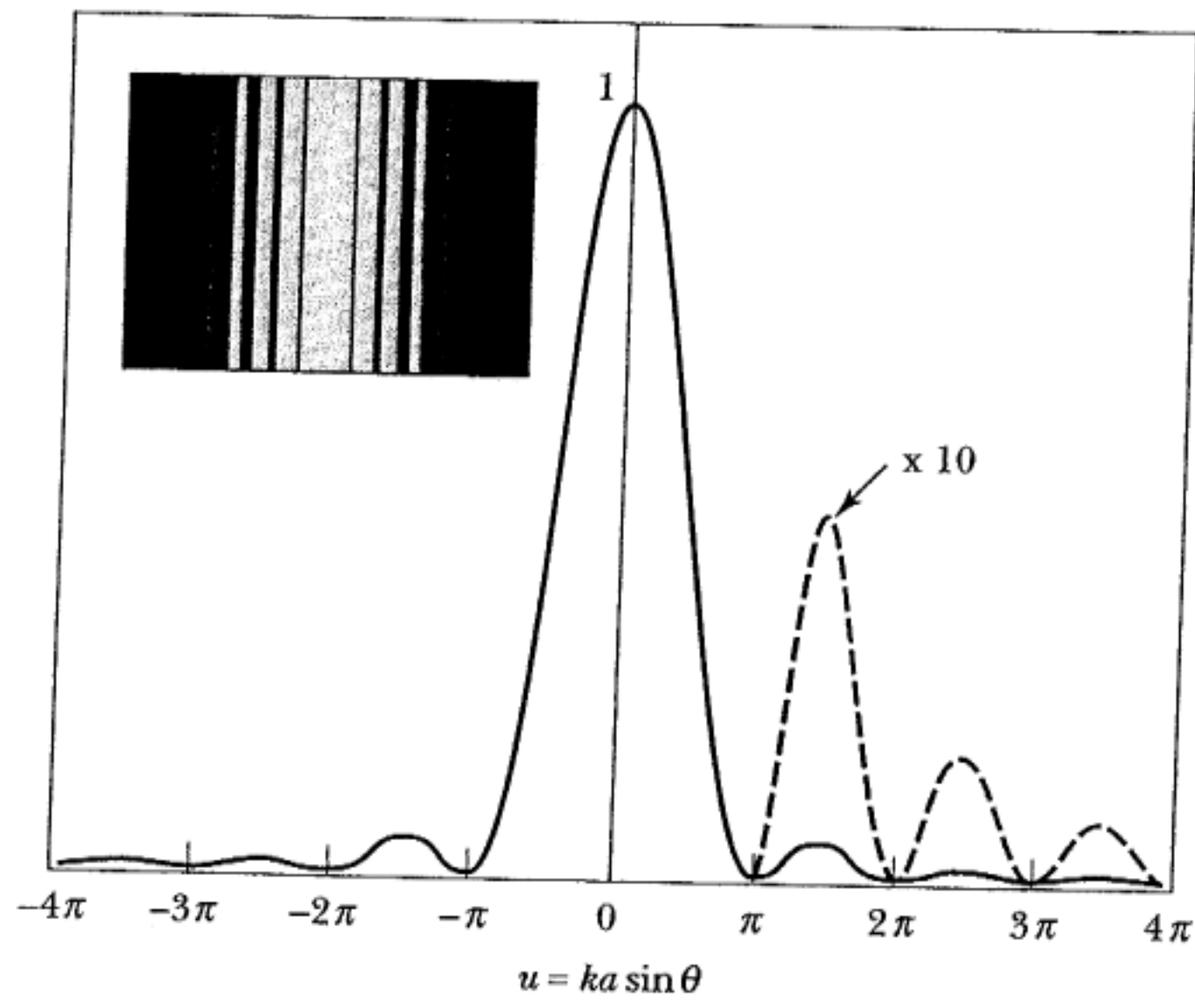
$$\begin{aligned} \psi(\theta) &\sim \int_{-a}^{+a} e^{-ik\alpha\xi} d\xi \\ &= \frac{i}{k\alpha} e^{-ik\alpha\xi} \Big|_{-a}^{+a} \\ &= i \cdot \frac{1}{k\alpha} (e^{-ik\alpha a} - e^{ik\alpha a}) \\ &= 2a \frac{\sin u}{u} = 2a \operatorname{sinc} u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } u = k\alpha a &= \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta \\ &\approx \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{x}{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I(\theta) &\sim |\psi(\theta)|^2 \\ &\sim (\operatorname{sinc} u)^2 \end{aligned}$$



(a) Amplitude

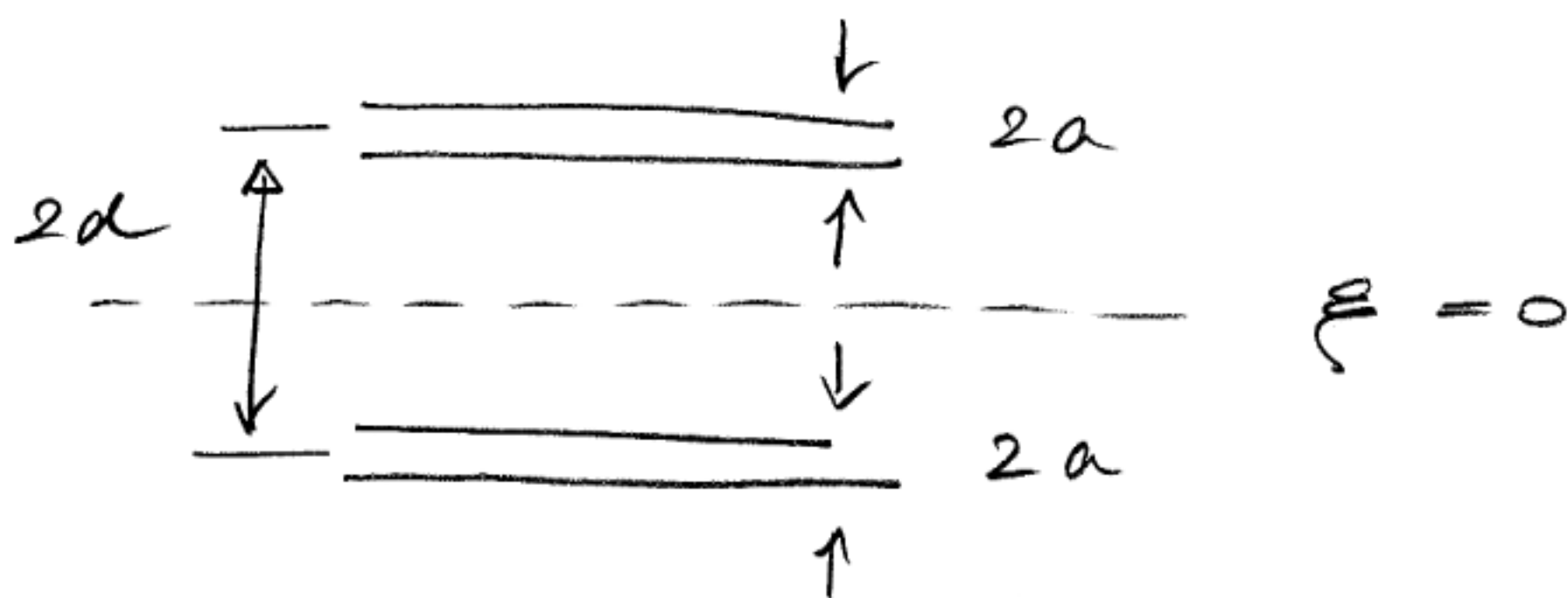


(b) Intensity

FIGURE 12-16. Amplitude and intensity of single-slit diffraction.

am Heard & Kana
 "classical electromagnetic
 radiation", Brooks / Cole

b) Doppelspalt



$$\mathcal{E} \sim \int_{-d-a}^{-d+a} e^{-ikx\xi} d\xi + \int_{d-a}^{d+a} e^{-ikx\xi} d\xi$$

$$= \frac{4}{kx} \sin(kxa) \cos(kxd)$$

$$I = I_0 \left(\frac{\sin u}{u} \right)^2 \cos^2 v$$

$$u = kxa = ka \sin \theta$$

$$v = kxd = kd \sin \theta$$

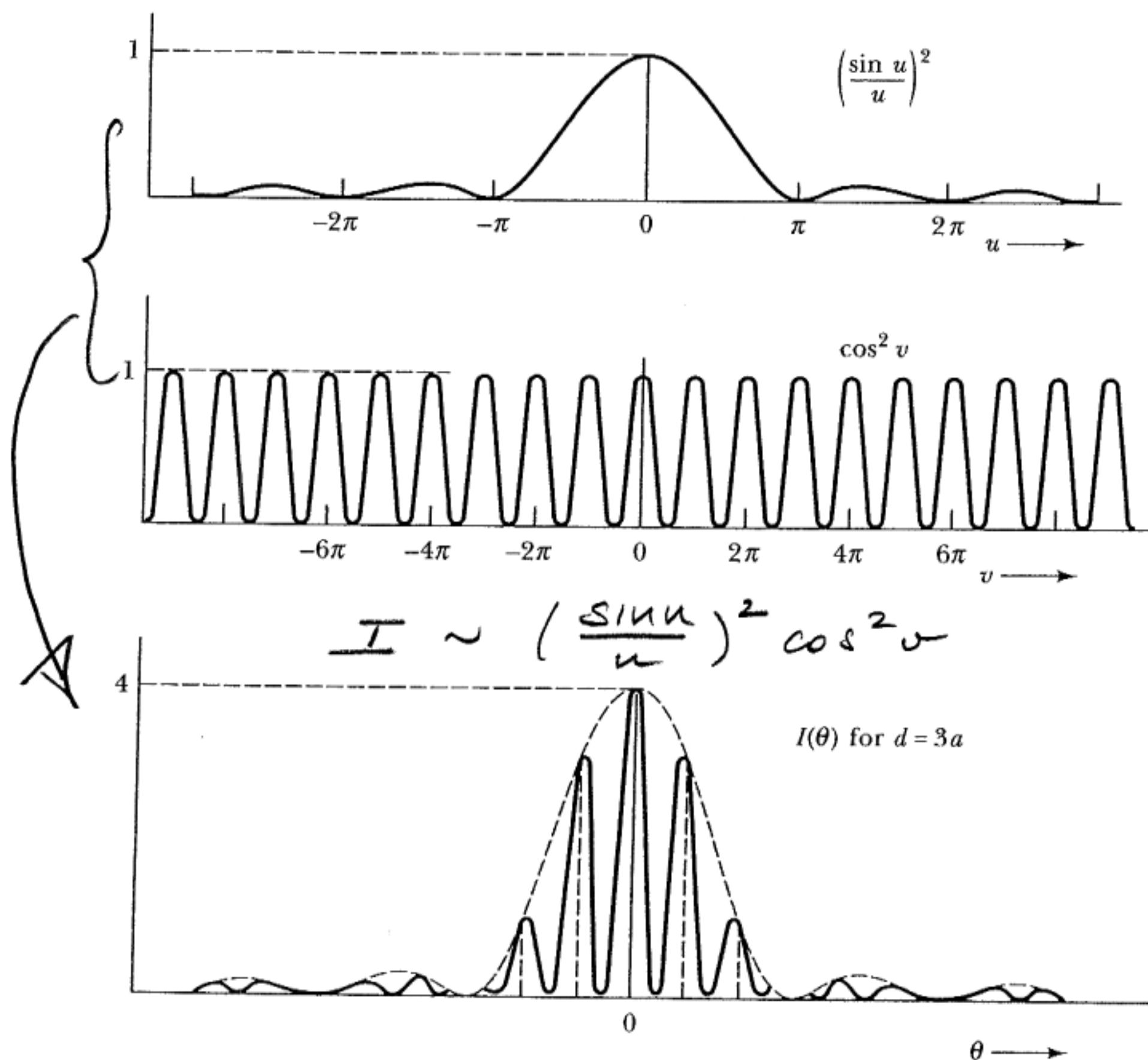


FIGURE 12-18. Diffraction and interference factors for double slit.

c) Rechteckige Apertur

$$H \sim \int_{-a}^a e^{-ik\alpha\xi} d\xi \int_{-b}^b e^{-ik\beta\eta} d\eta$$

$$\underline{I} = \underline{I}_0 \left(\frac{\sin u_a}{u_a} \right)^2 \left(\frac{\sin u_b}{u_b} \right)^2$$

$$u_a = k\alpha a \equiv \frac{2\pi a}{\lambda} \frac{\kappa}{2}$$

$$u_b = k\beta b \equiv \frac{2\pi b}{\lambda} \frac{\gamma}{2}$$

Produkt von Nullen an zwei
zueinander \perp Stellen.

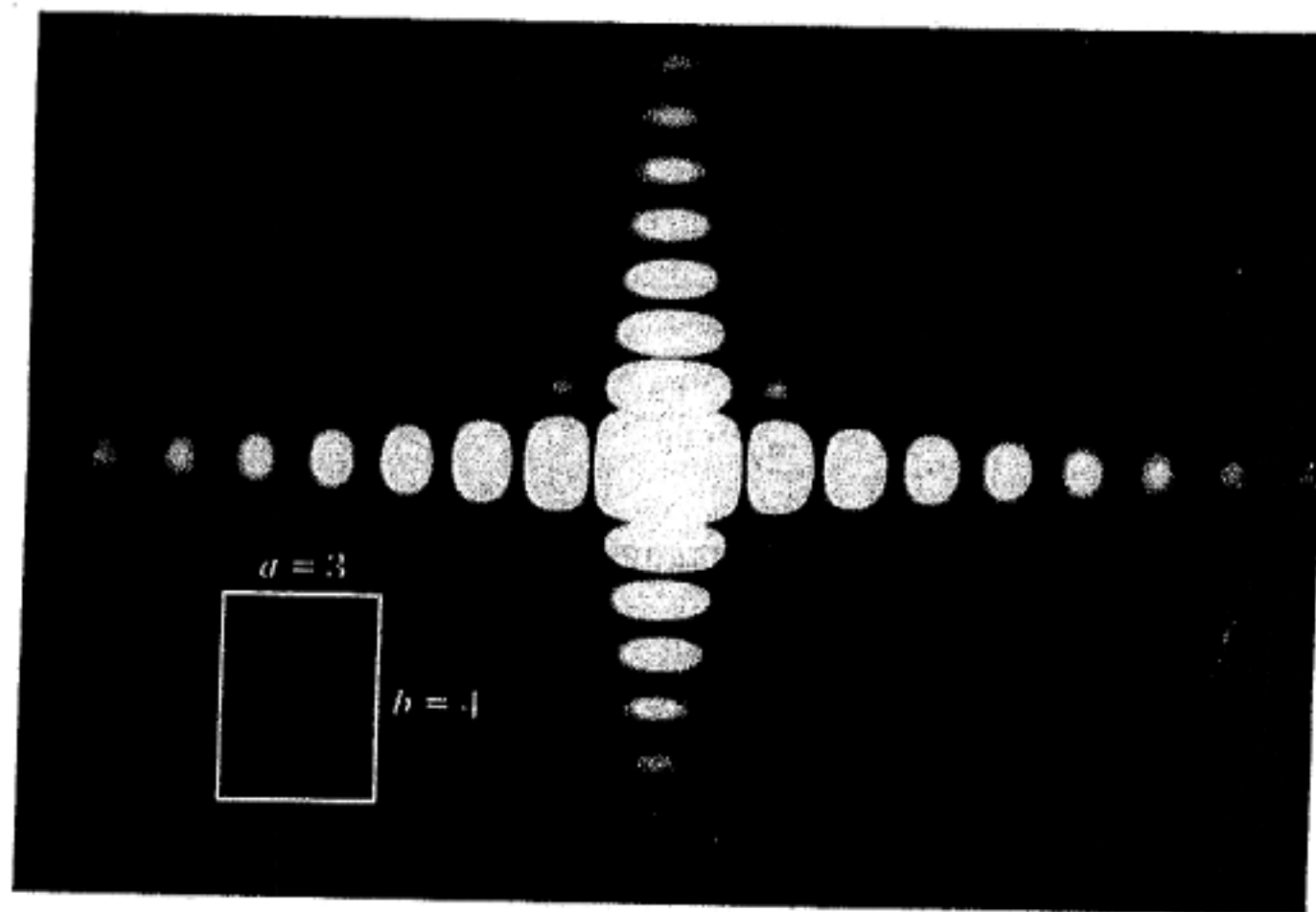


FIGURE 12-20. Diffraction pattern of rectangular aperture.

17. Juli. 2007

(1)

10. Relativistische Elektrodynamik

10.1. Prinzipien der speziellen Relativitätstheorie (SRT)

Raum-Zeit - Koordinaten, Ereignisse

$$x^\mu = (ct, \vec{x}) \quad \text{Vierertupel}$$

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

Indizes $0, 1, 2, 3$

Koordinaten abhängig vom Bezugssystem

ausgezeichnete Klasse: Inertialsysteme, K

[Teilchen bewegen sich gleichförmig ohne Kräfte]

nur lokal, eigentlich ART allgemeine Relativitätstheorie

da Gravitation

Postulat

(1) Naturgesetze identisch in allen Inertialsystemen K

\Rightarrow Forminvarianz der Gleichungen

(2) Wechselwirkungen nicht instantan, endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit

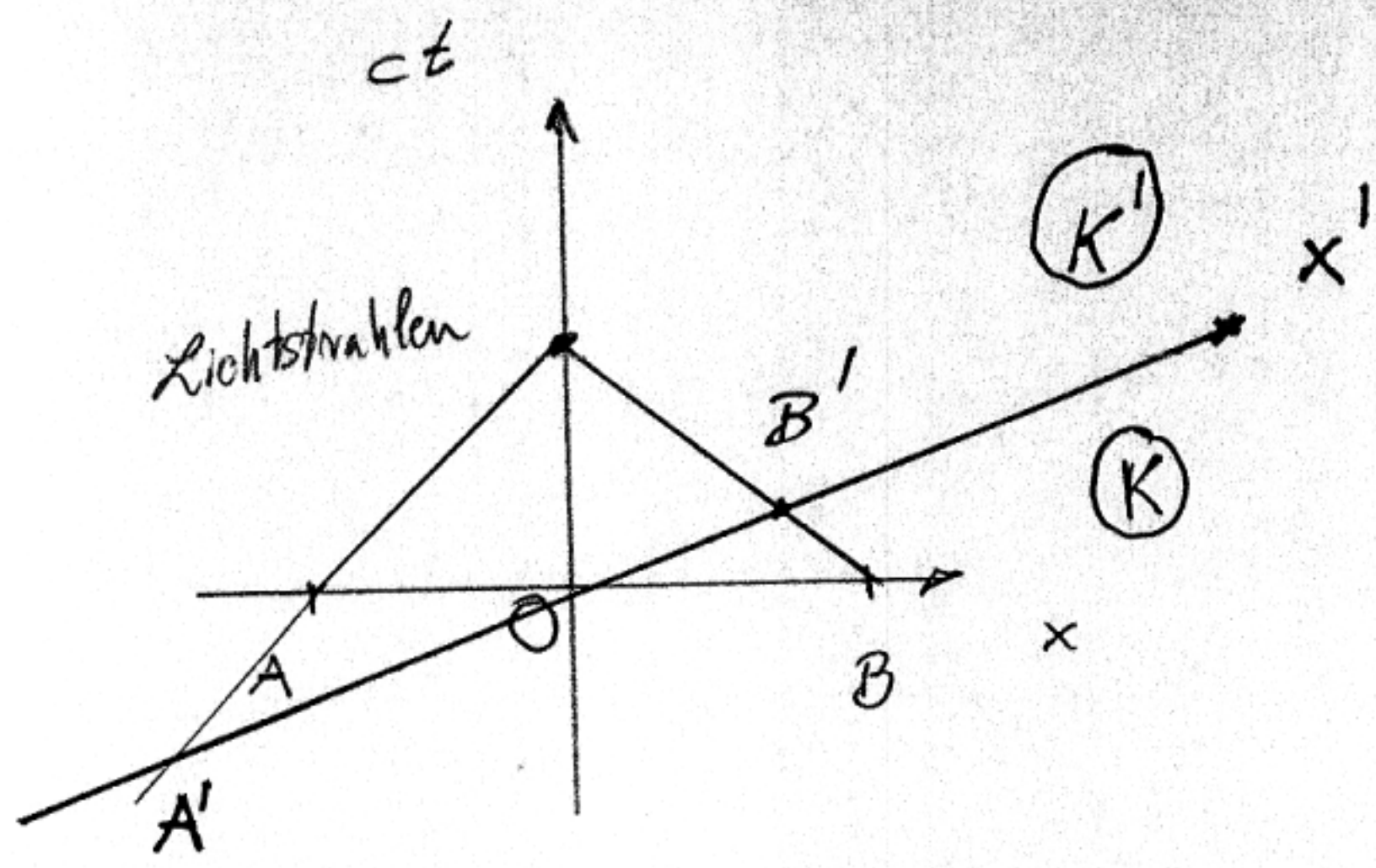
c , [Lichtgeschwindigkeit]

Folgerungen:

(a) c identisch in allen K

(b) Gleichzeitigkeit nicht absolut

Minkowski-Diagramm



(c) Ereignisse P, Q mit Koordinaten $x^\mu, x^\mu + dx^\mu$ im t
 infinitesimaler Abstand ds

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$ds = 0 \Rightarrow P, Q$ verbunden durch Lichtsignal

$\Rightarrow ds' = 0$ im (K')

allgemein Taylor

Homogenität im Raum und Zeit

$$ds^2 = a(v) ds'^2$$

\leftarrow Relativgeschwindigkeit (K) und (K')

Symmetrie

$$ds^2 = ds'^2$$

in allen Inertialsystemen!

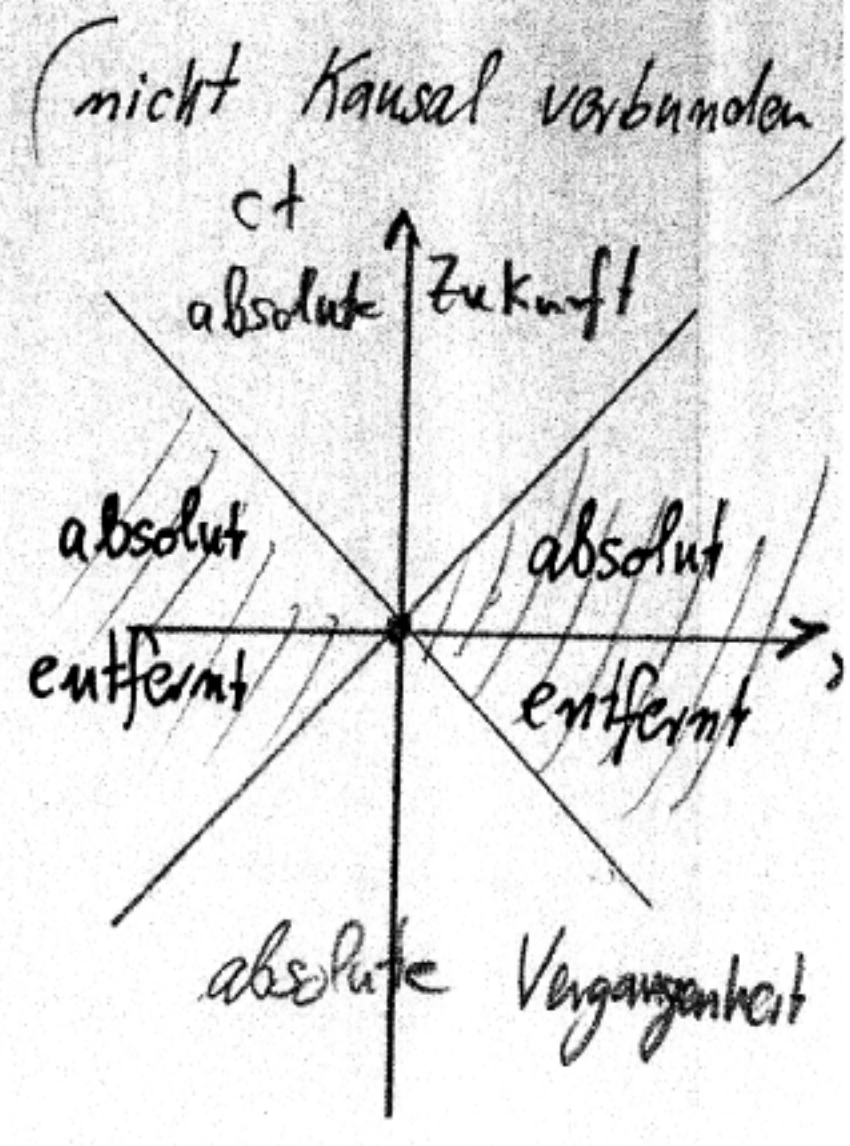
Definition:

$ds^2 > 0$
$ds^2 = 0$
$ds^2 < 0$

zeitartig
 lichtartig
 raumartig

unabhängig vom Inertialsystem.

Bedeutung: Uhr bewegt sich in (K)
 in dt um $|d\vec{x}|$
 lokales Inertialsystem $d\vec{x}' = 0$



$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 =$$

$$= ds'^2 = c^2 dt'^2$$

$$\Rightarrow dt' = \frac{ds}{c} = dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Eigenzeit der bewegten Uhr

Warnung: Vorzeichenkonvention für ds^2
 (+ ---) Raumzeit

alternativ (- +++)

[veraltet Minkowski $x^0 = ict$
 (++++)
 Euklidisch mit imaginärer Zeit]

Minkowski - Metrik

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indexkonvention
 oben: Kontravariant
 unten: Kovariant

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

Einsteinsche Summenkonvention

Transformationen zwischen Inertialsystemen: Lorentz-Transformation

lineare Abbildung

$$x^\mu \longrightarrow \boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu}$$

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Invarianz $\eta'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ aus Postulat

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} (\Lambda^\mu_\sigma dx^\sigma) (\Lambda^\nu_\tau dx^\tau) \stackrel{!}{=} \eta_{\sigma\tau} dx^\sigma dx^\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau = \eta_{\sigma\tau}}$$

notwendig und hinreichend

Matrixschreibweise

$$\underline{\Lambda}^T \underline{\eta} \underline{\Lambda} = \underline{\eta}$$

vgl. Rotationsmatrizen

$$\underline{R}^T \underline{R} = \underline{1}$$

Lorentzgruppe $LT \equiv$ (Lieggruppe)

(a) $\Lambda_1, \Lambda_2 \in LT \Rightarrow \Lambda = \Lambda_1 \circ \Lambda_2, \Lambda^\mu{}_\nu = (\Lambda_1)^\mu{}_\sigma (\Lambda_2)^\sigma{}_\nu$
 $\mathbb{1} \in LT$ etc.

Gruppe Untergruppe von reellen 4×4 Matrizen

(b) $|\det \Lambda|^2 = 1$

$\det \Lambda = +1$ eigentliche Lorentztrafos

(c) $(\sigma = \tau = 0)$

$\Rightarrow 1 = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_0 \Lambda^\nu{}_0 = (\Lambda^0{}_0)^2 - (\Lambda^1{}_0)^2 - (\Lambda^2{}_0)^2 - (\Lambda^3{}_0)^2$

$\boxed{(\Lambda^0{}_0)^2 \geq 1}$

$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ orthochron

(d) $\mathcal{L}_+^\uparrow = \{ \Lambda \in LT : \det \Lambda = 1, \Lambda^0{}_0 \geq 1 \}$

Untergruppe

(e) Drehungen sind Untergruppe $SO(3) \subset \mathcal{L}_+^\uparrow$

$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & R & \\ 0 & & & \end{array} \right)$

$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \Leftrightarrow R^T R = \mathbb{1}$

(f) Lorentz boost $x'^2 = x^2, x'^3 = x^3$
 $(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2$ invariant

$$x'^0 = x^0 \cosh \varphi - x^1 \sinh \varphi$$

$$x'^1 = -x^0 \sinh \varphi + x^1 \cosh \varphi$$

$$\Lambda(\varphi) = \begin{pmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi & 0 & 0 \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

φ : Rapidität

$$\Lambda(\varphi_1) \Lambda(\varphi_2) = \Lambda(\varphi_1 + \varphi_2) \text{ 1-dim Untergruppe}$$

$$x'^0 = \cosh \varphi (x^0 - x^1 \tanh \varphi)$$

$$x'^1 = \cosh \varphi (x^1 - x^0 \tanh \varphi)$$

$x'^1 = 0$ falls Beobachter mit konstanter Geschwindigkeit v

$$\Rightarrow \boxed{\tanh \varphi = v/c} =: \beta \quad \tanh^2 \varphi = \frac{\sinh^2 \varphi}{\cosh^2 \varphi} = 1 - \frac{1}{\cosh^2 \varphi}$$

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =: \gamma$$

nichtrelativistischer

Grenzfall

$$\boxed{t' = t}$$

$$\boxed{x' = x - vt}$$

Galilei-Transform

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma (t - \beta x/c^2)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \gamma (x - \beta ct)$$

10.2. Tensorbegriff, Vierervektoren

analog zu euklidischen Tensoren

$$K'_j = D_{jk} K_k$$

Definition 4-er Vektor $V^\mu = (V^0, \vec{V})$ kontravariant mit Transformationsgesetz

$$V'^\mu = \Lambda^\mu_\nu V^\nu \quad \text{mit } \Lambda \in LT$$

Tensoren
Kontravariant

$$T^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau T^{\sigma\tau} \quad \text{etc.}$$

Folgerung: inneres Produkt invariant

$$V^\mu \eta_{\mu\nu} W^\nu = V^0 W^0 - V^1 W^1 - V^2 W^2 - V^3 W^3$$
$$V'^\mu \eta_{\mu\nu} W'^\nu = \Lambda^\mu_\sigma V^\sigma \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\tau W^\tau = V^\sigma \eta_{\sigma\tau} W^\tau$$

in allen Inertialsystemen

Definition Kovarianter Vektor

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu$$

ziehen von Indices mit
Minkowski Tensor

Transformationsgesetz:

$$V'_\mu = \eta_{\mu\nu} V'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma V^\sigma$$
$$V'_\mu \Lambda^\mu_\tau = \Lambda^\mu_\tau \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma V^\sigma = \eta_{\tau\sigma} V^\sigma = V_\tau$$
$$V'_\mu = (\Lambda^{-1})^\tau_\mu V_\tau \quad \text{usw. für Tensoren}$$

Umfkehr von Indizes

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu \Rightarrow V^\nu = (\eta^{\mu\nu}) V_\mu$$

$$\eta^{\mu\sigma} \eta_{\sigma\nu} = \delta^\mu_\nu$$

Kronecker

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{V_\mu = (V^0, -\vec{V})}$$

Tensorfelder

$$S'(x') = S(x) \quad \text{Skalar}$$

$$V'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(x) \quad \text{Vektor, etc}$$

$$\partial_\mu S(x) = \frac{\partial S}{\partial x^\mu}(x) \quad \text{transformiert sich kovariant!}$$

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu$$
$$= (\partial_0, \vec{\nabla})$$

Wellenoperator, d'Alembert

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \underline{\partial^\nu \partial_\nu}$$

$$= \partial'^\nu \partial'_\nu \quad \text{invariant unter Lorentz-Transf}$$

Wellengleichung

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \varphi = 0 \quad \text{invariant}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

Vierervektor

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J})$$

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

invariant

Lorentz eichung

$$\frac{1}{c} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \chi$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \partial_t \chi$$

Umrechen

$$A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \chi$$

$$\text{Vierervektor } A^\mu = (\varphi, \vec{A})$$

$$\boxed{\partial_\mu A^\mu = 0}$$

Wellengleichungen

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2\right) \varphi = 4\pi \rho + \frac{1}{c} \partial_t \left(\frac{1}{c} \partial_t \varphi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)$$

$$\boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu + \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu)}$$

Ladungserhaltung

⇒

$$\boxed{\partial_\mu J^\mu = 0}$$

Lorentz-Eichung

$$\boxed{\square A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\mu}$$

elektrisches Feld

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \nabla \varphi$$

magnetisches Feld

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

elektromagnetischer Feldstärke - Tensor, Faraday - Tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

antisymmetrisch $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$

eichinvariant $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$

$$F_{10} = \partial_1 A_0 - \partial_0 A_1 = \partial_x \varphi + \frac{1}{c} \partial_t A_x = -E_x$$

$$F_{20} = -E_y, \quad F_{30} = -E_z$$

$$F_{12} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 = -\partial_x A_y + \partial_y A_x = -B_z$$

$$F_{23} = -B_x, \quad F_{31} = -B_y$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\tau} F_{\sigma\tau} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial_\mu \bar{F}^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu} \quad \begin{array}{l} \text{inhomogene Maxwellgl.} \\ \text{Kovariant} \end{array}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\bar{F}^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \text{Potentialbedingungen}$$

$$\boxed{\partial_\lambda \bar{F}_{\mu\nu} + \partial_\mu \bar{F}_{\nu\lambda} + \partial_\nu \bar{F}_{\lambda\mu} = 0}$$

Lorentz - Trafo

$$\bar{F}'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau \bar{F}^{\sigma\tau}$$

Lorentz - Boost

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma (E_y - \beta B_z) & B'_y = \gamma (B_y + \beta E_z) \\ E'_z = \gamma (E_z + \beta B_y) & B'_z = \gamma (B_z - \beta E_y) \end{array}}$$

Levi-Civita-Symbol

$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$ total antisymmetrisch

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} = -\epsilon^{\nu\mu\sigma\tau} = -\epsilon^{\sigma\gamma\mu\tau} = -\epsilon^{\tau\nu\sigma\mu}$$

$$\epsilon^{0123} = 1 \quad \text{nur ein Wert}$$

Pseudo-Tensor invariant

$$\epsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu \Lambda^\gamma_\sigma \Lambda^\delta_\tau \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}$$

total antisymmetrisch

$$\begin{aligned} \epsilon'^{0123} &= \Lambda^0_\mu \Lambda^1_\nu \Lambda^2_\sigma \Lambda^3_\tau \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \\ &= (\det \Lambda) = \pm 1 \end{aligned}$$

Potentialbedingungen

$$\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$$

Invariante Skalar

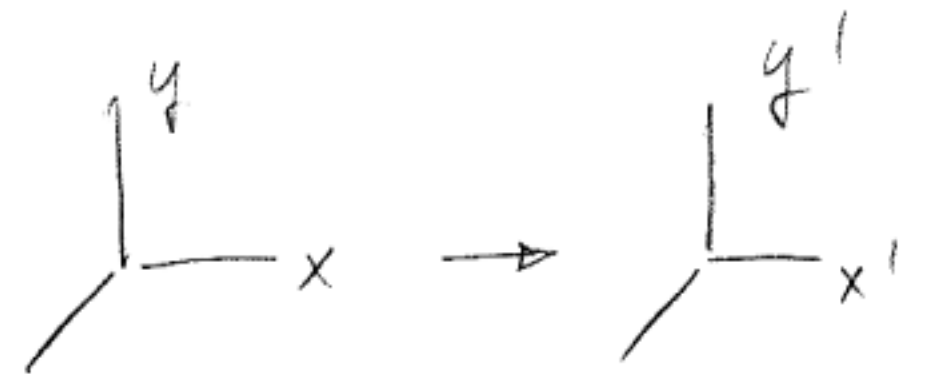
$$\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \dots = \vec{B}^2 - \vec{E}^2$$

unabhängig vom Bezugssystem

$$\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} = \vec{B} \cdot \vec{E} \quad \text{invariant}$$

Feld einer Punktladung

e ruhe in K



$$\vec{B} = 0, \quad \vec{E} = \frac{e \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

$$(a) \quad E'_x(x') = E_x(x) = e \frac{x}{r^3}$$

$$b^2 = y^2 + z^2 = y'^2 + z'^2 \quad (\text{Abstand zur } x\text{-Achse})$$

$$E'_x = \frac{e \gamma (x' + vt')}{(\gamma^2 (x' + vt')^2 + b^2)^{3/2}}$$

$$(b) \quad E'_y = \gamma E_y = \frac{e \gamma y'}{(\quad)^{3/2}}$$

$$E'_z = \gamma E_z = \frac{e \gamma z'}{(\quad)^{3/2}}$$

Die γ Faktoren verzerren das Feld. Betrachte Felder zur Zeit $t' = 0$

$$\begin{aligned} \vec{E}'(\vec{x}') &= e \frac{\gamma \vec{x}'}{(\gamma^2 x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} \\ &= e \frac{(1 - \beta^2) \vec{x}'}{(\tau'^2 - \beta^2 b^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Die Feldlinien sind Geraden wie bei der ruhenden Ladung.

Der Betrag von \vec{E}' ist

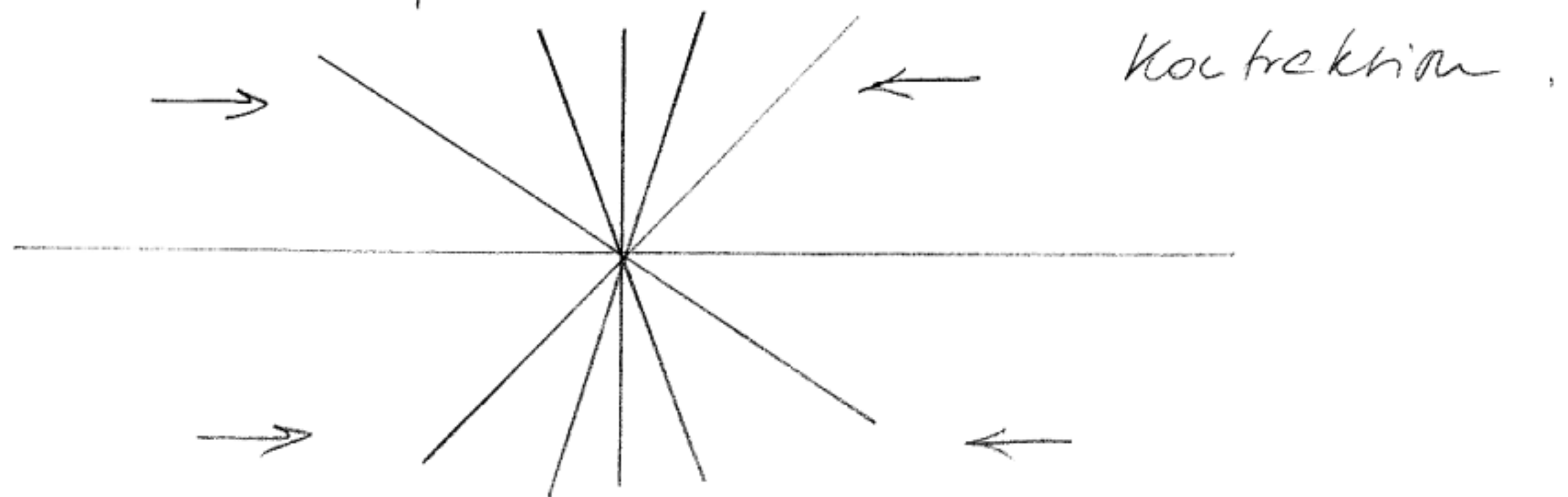
$$|\vec{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2(1-\beta^2\sin^2\theta')^{3/2}}; \quad \sin\theta' = \frac{b}{r'}$$

Für festes r' , $|\vec{E}'|$ maximal für $\theta' = \pi/2$
(\perp Bewegungsrichtung)

$$|\vec{E}'| = \frac{e}{r'^2\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \theta' = \pi/2$$

$|\vec{E}'|$ minimal für $\theta' = 0$
(\parallel Bewegungsrichtung)

$$|\vec{E}'| = \frac{e(1-\beta^2)}{r'^2} \quad \theta' = 0$$



Magnetfeld

$$B_x' = 0, \quad B_y' = \beta E_z', \quad B_z' = -\beta E_y'$$

$$\vec{B}' = \vec{\beta} \times \vec{E}'$$

Eine bewegte Ladung erzeugt also ein magnetisches Feld proportional zu $\frac{v}{c}$.

10.3. Variationsprinzip für die Feldgleichungen

Die Grundgleichungen der Physik lassen sich aus Wirkungsprinzipien gewinnen. Betrachte allgemein

$$S[\phi] = \int L(\phi_a, \partial_\mu \phi_a) d^4x$$

ϕ_a bezeichne eine Anzahl von Feldern (z. B. A^μ für die Maxwell Theorie).

untersuche die Variation von $S[\phi]$

$$I(\varepsilon) := S[\phi + \varepsilon \chi], \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$$

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} I(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \int \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial \phi_a} \chi_a + \frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} \right] d^4x$$

wobei $\phi_{a,\mu} := \partial_\mu \phi_a$ abgekürzt wird.

Für den letzten Term verwenden wir die Identität

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_{a,\mu} = \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a \right) - \left(\partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \right) \chi_a$$

Unter Verwendung des Gauß'schen Satzes gibt dann

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} &\equiv \delta S = \int \sum_a \left[\frac{\partial L}{\partial \phi_a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \right] \chi_a d^4x \\ &\quad + \int \frac{\partial L}{\partial \phi_{a,\mu}} \chi_a d\Gamma_\mu \end{aligned}$$

Damit kann man zeigen, dass die Wirkung für das Feld ϕ genau dann stationär ist,

bezüglich Variationen $\delta\varphi$, welche am Rand verschwinden, wenn die Euler-Lagrange Gleichungen gelten:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial \varphi_{a,\mu}} = 0}$$

Eine Anwendung dieses allgemeinen Prinzips ist die Maxwell'sche Theorie. Die Lagrangendichte

$$\boxed{L = -\frac{1}{16\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha}$$

führt zu den Maxwellgleichungen.

Die Lagen sind wie folgt zeigen. Es gilt

$$L = -\frac{1}{16\pi} \eta_{\alpha\mu} \eta_{\beta\nu} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) - \frac{1}{c} j^\alpha A_\alpha$$

Folglich

$$\frac{\partial L}{\partial A^\alpha} = -\frac{1}{c} j^\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial^\beta A^\alpha)} = -\frac{1}{16\pi} 2(-2) F_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} F_{\alpha\beta}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten folglich

$$\boxed{\partial_\beta F^{\alpha\beta} = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha} \quad \left(\partial_\beta F^{\beta\alpha} = \frac{4\pi}{c} j^\alpha \right)$$

10.4. Bewegungsgleichung für Punktteilchen
im festen elem. Feld

Wir definieren als 4er Geschwindigkeit

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu$$

wobei $d\tau = \frac{1}{\gamma} dt$ die Eigenzeit ist.

Es gilt

$$u^\mu = \gamma \frac{d}{dt} (ct, \vec{x}) = (\gamma c, \gamma \vec{v})$$

Ferner gibt für das Minkowski Skalarprodukt

$$u \cdot u = u_\mu u^\mu = \gamma^2 (c^2 - \vec{v}^2) = \frac{c^2 - v^2}{1 - \beta^2} = c^2;$$

Als 4er Impuls definiert man

$$p^\mu = m u^\mu = (\gamma m c, \gamma m \vec{v})$$

$$\frac{p^0}{mc} = \gamma; \quad \frac{|\vec{p}|}{p^0} = \beta$$

$$p \cdot p = m^2 c^2$$

Durch Ableiten nach der Eigenzeit τ ergibt sich daraus dann

$$\dot{p}^\mu p_\mu = p^\mu \dot{p}_\mu = 0$$

Nun wollen wir die Bewegungsgleichung für einen geladenen Massenpunkt aufstellen. Diese folgt aus der Annahme, daß im momentanen Ruhesystem der Ladung gilt

$$\frac{d}{dt} m \vec{v} = e \vec{E} \quad (\vec{v} = 0)$$

In diesem System gilt $\dot{p}^0 = 0$ und $p^0 = mc$

Somit ist im momentanen Ruhesystem

$$\boxed{\dot{p}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$$

Diese lorentz kovariante Gleichung gilt dann in jedem Lorentzsystem!

$$\text{NR: } \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & 0 & 0 \\ E_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -\vec{v} = 0 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \dot{p}^0 = 0; \quad \dot{p}_i = \frac{e}{c} E_i \cdot c$$

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} p_i = \gamma \frac{d}{dt} (\gamma m \vec{v}) = \frac{d}{dt} (m \vec{v})$$

$$(\gamma = 1, \frac{d\gamma}{dt} = 0)$$

*) $\vec{v} = 0$; dann folgt aus $p_\mu \dot{p}^\mu = 0$: $\dot{p}^0 = 0$
weiter aus $\frac{p^0}{mc} = \gamma = 1$ folgt $p^0 = mc$

Die Zerlegung der kovarianten Gleichung in raum-zeitliche Anteile ergibt (nach einfacher Reduktion)

$$\frac{d}{dt} (m \gamma \vec{v}) = e (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d}{dt} (m \gamma c^2) = e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

wobei auf der rechten Seite jeweils die Lorentzkraft und jeweils die Leistung des Feldes am Massenpunkt stehen. Wir interpretieren daher

$$E_i = \gamma m c^2$$

als die Energie des Massenpunktes. Man nennt das halb auch

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right)$$

den Energie - Impulsvektor des Teilchens.

Dann gilt $E = \gamma m c^2$
und $E = |\vec{p}| c / v$

Für Teilchen mit Ruhe Masse $m = 0$ gilt $v = c$ und folglich $E = |\vec{p}| c$

Allgemein hat man

$$m^2 c^2 = \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \vec{p}^2$$

also $E^2 = |\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4$

oder

$$E = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

Für $v/c \ll 1$

$$E \approx \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhe enrg.}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_{\text{nichtrel. kin. Enrg.}} + \underbrace{\frac{3}{8} m \frac{v^4}{c^2}}_{\text{relativistische Korrektur}} + \dots$$

Variationsprinzip

Wir zeigen nun, daß das Hamiltonsche Variationsprinzip

$$\delta \int L dt = 0$$

für die Lagrangefunktion

$$L(x^\mu(t), \frac{dx^\mu}{dt}) = -mc \sqrt{\eta^{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} - \frac{e}{c} A_\mu(x(t)) \frac{dx^\mu}{dt}$$

die Bewegungsgleichungen

$$\dot{p}^\mu = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu$$

ergibt.

Beachte, daß das Variationsprinzip unabhängig von der Parameterwahl t ist.

Ferner ist wichtig, daß sich die Lagrange-
dichte bei einer Umordnung nur um eine

totale Ableitung ändern und damit die Bewegungsgleichungen unverändert bleiben.

$$L \rightarrow L - \frac{e}{c} \partial_\mu A \frac{dx^\mu}{dt} =$$

$$= L - \frac{e}{c} \frac{dA(x(t))}{dt}$$

Die Euler-Lagrange Gleichungen lauten

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right)} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0$$

Explizit gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{dt} \right)} = - \frac{1}{2} mc \frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt}}} \cdot 2 \frac{dx_\mu}{dt}$$

$$- \frac{e}{c} A_\mu$$

Für $t = \tau$ (Eigenzeit) gilt

$$\frac{\partial L}{\partial \left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)} = - \frac{mc}{\underbrace{\sqrt{u \cdot u}}_{=c}} \underbrace{\frac{dx_\mu}{d\tau}}_{u_\mu} - \frac{e}{c} A_\mu$$

$$= - m u_\mu - \frac{e}{c} A_\mu$$

$$\frac{\partial L}{\partial x^\mu} = - \frac{e}{c} u^\nu \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = - \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu}$$

$$\rightarrow \frac{d}{d\tau} (m u_\mu) = \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu,\mu} - \frac{e}{c} \frac{d}{d\tau} A_\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu\mu} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau} \\
&= \frac{e}{c} u^\nu A_{\nu\mu} - \frac{e}{c} u^\nu A_{\mu\nu} \\
&= \frac{e}{c} u^\nu (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) = \frac{e}{c} u^\nu F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{p}_\mu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu \quad \checkmark$$

Hamiltonsche Formalismus

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e \left(\phi - \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{A} \right)$$

Wenn man $\lambda = t$ wählt

Der kanonisch konjugierte Impuls zu \vec{x} ist

$$\vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

\uparrow
 $(\dot{\vec{x}} = \vec{v})$

$$\vec{\pi} = \vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}$$

wobei \vec{p} der mechanische Impuls ist.

Die Hamiltonfunktion ist

$$H = \left(\vec{\pi} \cdot \dot{\vec{x}} - L \right) \underbrace{\left(\vec{\pi}, \vec{x} \right)}$$

Funktion von $\vec{\pi}$ und \vec{x}

$$\bullet \quad \vec{\pi} \cdot \dot{\vec{x}} - L =$$

$$= \gamma m \vec{v}^2 + \frac{e}{c} \vec{A} \cdot \vec{v} + \frac{1}{\gamma} m c^2 + e\phi - \frac{e}{c} \vec{v} \cdot \vec{A}$$

$$= \gamma m c^2 (\beta^2 + (1 - \beta^2)) + e\phi$$

$$= \gamma m c^2 + e\phi$$

$$\bullet \quad \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - v^2/c^2} =$$

$$= m^2 c^2 \left(-1 + \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}}_{=\gamma^2} \right)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{m c} \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}$$

Dann

$$H(\vec{\pi}, \vec{x}) = c \sqrt{m^2 c^2 + \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2} + e\phi$$

Nichtrel. Breitfall

$$H = m c^2 + \frac{1}{2} m \left(\vec{\pi} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + e\phi$$

10.5. Energie - - Tensor

Die Bewegungsgleichung eines geladenen Teilchens im electrom. Feld lautet

$$m \dot{u}^\mu = \frac{e}{c} F^\mu{}_\nu u^\nu = K^\mu$$

4er Kraft

Folgt ihr die 4er Kraftdichte \mathcal{K}^μ für eine kontinuierliche Stromverteilung

$$\mathcal{K}^\mu = \frac{1}{c} F^\mu{}_\nu j^\nu$$

Wie bereits in Kapitel 1 drücken wir dies mit Hilfe der Feldgleichungen durch die Felder alleine aus

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^\mu &= -\frac{1}{4\pi} F^\mu{}_\nu \partial_\alpha F^{\nu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{4\pi} \underbrace{(\partial^\alpha F^{\mu\nu})}_{\text{anti-sym.}} F_{\nu\alpha} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) + \frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} (\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu}) \end{aligned}$$

Nach der homogenen Gleichung gilt

$$\partial^\alpha F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\alpha\mu} = -\partial^\mu F^{\nu\alpha}$$

$$\rightarrow \mathcal{K}^\mu = -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) - \frac{1}{8\pi} F_{\nu\alpha} \partial^\mu F^{\nu\alpha}$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \partial_\alpha (F^\mu{}_\nu F^{\nu\alpha}) - \frac{1}{16\pi} \partial^\mu (F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha})$$

Damit findet man

$$\begin{aligned} k^\mu &= -\partial_\alpha T^{\mu\alpha} \\ T^{\mu\alpha} &= \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\nu} F_\nu{}^\alpha + \frac{1}{4} \eta^{\alpha\mu} F_{\nu\beta} F^{\nu\beta} \right) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind eine kompakte Formulierung des Energie- und Impulserhaltungssatzes der Elektrodynamik

Explizit:

$$k^\mu = \left(\frac{1}{c} \vec{j} \cdot \vec{E}, \vec{j} E + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \right)$$

$$(T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) & \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} \\ \frac{1}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B} & \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} E^2 \delta_{ik} - E_i E_k + \frac{1}{2} B^2 \delta_{ik} - B_i B_k \right) \end{pmatrix}$$

0-Komponente:

$$\partial_t u + \operatorname{div} \vec{S} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0 \quad \text{Energiesatz}$$

$$u = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{B}$$

Raumkomponenten

$$h^i = - T^i{}_{,\alpha} = - T^i{}_{,0} - T^i{}_{,k}$$

$$\boxed{h^i + \partial_t \pi^i = - \partial_k T^i{}_{,k}} \quad \text{--- Impulzatz}$$

Wobei

$$\vec{\pi} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

$$T_{ik} = - \frac{1}{4\pi} \left[E_i E_k + B_i B_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (E^2 + B^2) \right]$$

--- Impulzatz

$$\frac{d}{dt} (P_i^{\text{med}} + P_i^{\text{Feld}}) = - \int_{\partial V} T_{ik} d\vec{k}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{P}^{\text{med}} = \int_V \vec{k} dV \quad \text{zeitliche Änderung des med. Impulses}$$

$$P^{\text{Feld}} = \int_V \vec{\pi} dV \quad \text{--- Impuls der Felder}$$

$$\text{r. S.} = - \int_{\partial V} T_{ik} d\vec{k} \quad \text{Impulsfluss nach } V \text{ über } \partial V$$

$- T_{ik} n_k$ Kraft pro Flächeneinheit

Maxwellsche Spannungen.