Fouriertransformation

Sei $\mathcal{L}$ die Menge der stückweise stetigen und komplexwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}^d$. Für $\varphi \in \mathcal{L}$ gelte $\int |\varphi(x)|\, d^dx < \infty$; $x = (x_1, \dots, x_d)$

Definition: $\varphi \in \mathcal{L}$, $x = (x_1, \dots, x_d)$, $k = (k_1, \dots, k_d)$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{\varphi}(k) &:= \int d^dx\, e^{ikx} \varphi(x) \\ &:= F[\varphi](k) \end{aligned}}$$

heisst Fouriertransformation von $\varphi(x)$.

Bemerkungen:

(1) $\int d^dx\, e^{-ikx} \varphi(x)$, $\int \frac{d^dx}{(2\pi)^d} e^{ikx} \varphi(x)$, $\int \frac{d^dx}{(2\pi)^{d/2}} e^{ikx} \varphi(x)$ sind auch Fouriertransformationen

(2) Die Fouriertransformation ist eine lineare Abbildung $\mathcal{L} \to F[\mathcal{L}]$

$$F[\lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2] = \lambda_1 F[\varphi_1] + \lambda_2 F[\varphi_2]$$

(3) $\underline{\psi}(x) := \varphi(-x) \rightsquigarrow \hat{\underline{\psi}}(k) = \hat{\varphi}(-k)$

φ und $\hat{\varphi}$ haben die gleiche Achsensymmetrie

(4) $\psi(x) := \varphi^*(x)$

$$\rightsquigarrow \hat{\psi}(k) = \int d^dx \, e^{ikx} \varphi^*(x)$$

$$= \int d^dx \left(e^{-ikx} \varphi(x) \right)^*$$

$$= \hat{\varphi}^*(-k)$$

Falls $\varphi(x)$ reell ist, dann gilt $\hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}^*(-k)$.

(5) Verschiebungssätze

(a) $y \in \mathbb{R}^d$

$$\psi_y(x) := \varphi(x-y)$$

$$\hat{\psi}_y(k) = \int d^dx \, e^{ikx} \varphi(x-y)$$

$$= \int d^dx \, e^{ik(x-y)+iky} \varphi(x-y)$$

$$\underset{z=x-y}{=} e^{iky} \int d^dz \, e^{ikz} \varphi(z)$$

$$= e^{iky} \hat{\varphi}(k)$$

(b) $\psi_y(x) := e^{ipx} \varphi(x)$

$$\hat{\psi}_y(k) = \int d^dx \, e^{ikx} e^{ipx} \varphi(x)$$

$$= \hat{\varphi}(k+p)$$

Verschiebungen im Ortraum führen zu Phasenfaktoren im Fourierraum und umgekehrt.

(6) (5a)

$$-\frac{\partial}{\partial y_l}\hat{f}_y(k) = (-ik_l)\, e^{iky}\,\hat{\varphi}(k)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y_l}\int d^dx\, e^{ikx}\,\varphi(x-y)$$

$$= \int d^dx\, e^{ikx}\underbrace{(-\partial_l)\varphi(x-y)}_{\partial_l\varphi(x-y)}$$

Setze $y = 0$, dann

$$\boxed{-ik_l\,\hat{\varphi}(k) = F[\partial_l\varphi](k)}$$

$$\partial_l \to -ik_l \quad !$$

Durch die Fouriertransformation werden aus Ableitungen ∂_l Multiplikationen mit $(-ik_l)$

Beispiele:

$$F[\partial_l\partial_m\varphi(x)](k) = (-ik_l)\,F[\partial_m\varphi(x)](k)$$

$$= (-ik_l)(-ik_m)\,F[\varphi(x)](k)$$

$$= (-ik_l)(-ik_m)\,\hat{\varphi}(k)$$

$$F[\Delta\varphi(x)](k) = -k^2\,\hat{\varphi}(k)$$

(7) (5b) $$\frac{\partial}{\partial p_l} \hat{\varphi}(k+p)\Big|_{p=0} = \frac{\partial}{\partial k_l} \hat{\varphi}(k+p)\Big|_{p=0}$$

$$= \frac{\partial}{\partial p_l} \int d^d x \, e^{ikx} e^{ipx} \varphi(x)\Big|_{p=0}$$

$$= \int d^d x \, e^{ikx} (i x_l) e^{ipx} \varphi(x)\Big|_{p=0}$$

$$= \int d^d x \, e^{ikx} (i x_l) \varphi(x)$$

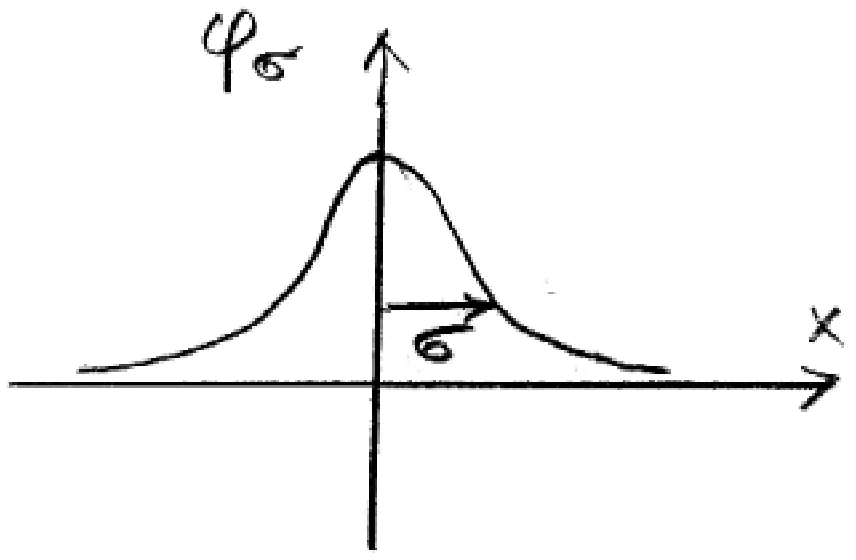
$$\rightsquigarrow \boxed{F[x_l \varphi](k) = -i \frac{\partial}{\partial k_l} \hat{\varphi}(k)}$$

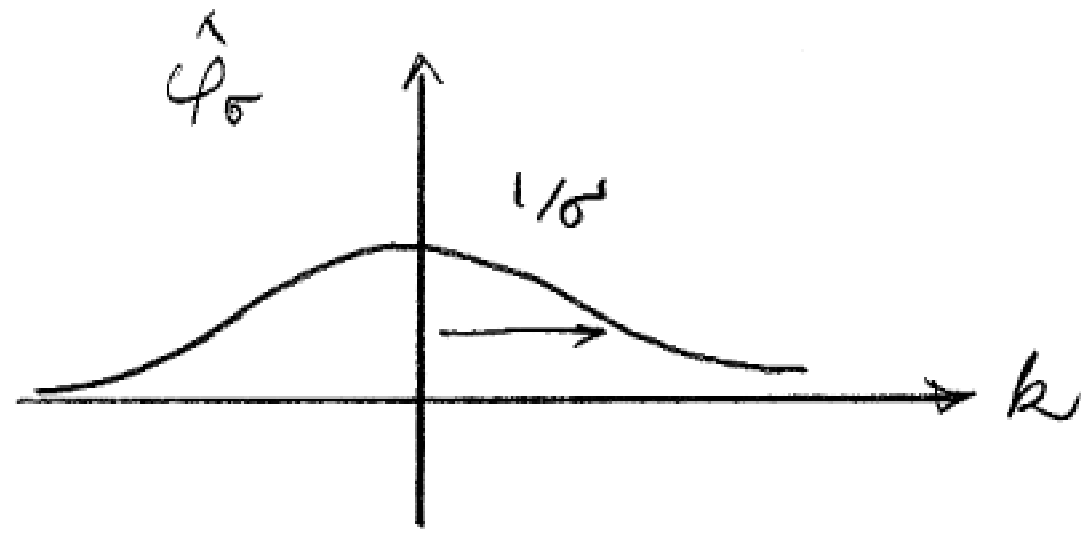
$$x_l \to -i \frac{\partial}{\partial k_l} \quad ?$$

(8) Gaußfunktion

$$\varphi_\sigma(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\,\sigma)^d} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]$$

$$\hat{\varphi}_\sigma(k) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2\right]$$





$$F[\underbrace{\varphi_{\sigma=1}}_{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{d/2} e^{-x^2/2}}](k) = e^{-k^2/2}$$

$e^{-x^2/2}$ Eigenfkt. mit EW $(2\pi)^{d/2}$

(9) Yukawa - Funktion $\quad d = 3$

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{r} e^{-\kappa r} , \qquad r = |\vec{x}|$$
$$\mathrm{Re}\,\kappa > 0$$

$$\hat{\varphi}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{k^2 + \kappa^2}$$

Nebenrechnung:

$$\int d^3x \, \frac{1}{r} e^{-\kappa r} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} =$$

$$\underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} d\vartheta \sin\vartheta}_{\int_{-1} d\cos\vartheta} \int_0^{\infty} dr \, r^2 \frac{1}{r} e^{-\kappa r} e^{ikr\cos\vartheta}$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r \, e^{-\kappa r} \underbrace{\int_{-1}^{1} d\xi \, e^{ikr\xi}}_{= \frac{1}{ikr}\left[e^{ikr} - e^{-ikr}\right]}$$

$$= -\frac{2\pi}{ik} \left[\frac{1}{ik - \kappa} + \frac{1}{ik + \kappa} \right]$$

$$= -\frac{2\pi}{ik} \frac{ik + \kappa + ik - \kappa}{(ik - \kappa)(ik + \kappa)} = \frac{-4\pi}{-k^2 - \kappa^2}$$

$$= \frac{4\pi}{k^2 + \kappa^2}$$

Transformationsgesetz

Sei $t_{i_1 \dots i_N}$ ein Tensor N-ter Stufe und D eine orthogonale Transformation

$$t'_{i_1 \dots i_N}(x') = D_{i_1 j_1} \cdots D_{i_N j_N} \, t_{j_1 \dots j_N}(x)$$

Dann gilt

$$\hat{t}_{i_1 \dots i_N}(k') = D_{i_1 j_1} \cdots D_{i_N j_N} \, \hat{t}_{j_1 \dots j_N}(k)$$

mit $k'_i = D_{ij} k_j$

Beweis:

$$\hat{t}'_{i_1 \dots i_N}(k') = \int d^d x' \, e^{i k' x'} \, t_{i_1 \dots i_N}(x')$$

$$= \int d^d x' \, e^{i k'_l D_{lj} x_j} \, D_{i_1 j_1} \cdots D_{i_N j_N} \, t_{j_1 \dots j_N}(x)$$

$$= D_{i_1 j_1} \cdots D_{i_N j_N} \int d^d x \underbrace{\left| \frac{\partial(x'_1 \dots x'_d)}{\partial(x_1 \dots x_d)} \right|}_{|\det D|} t_{\dots}(x) \, e^{i k_j x_j}$$

Transformationssatz der mehrdim. Analysis

$$= D_{i_1 j_1} \cdots D_{i_N j_N} \, \hat{t}_{j_1 \dots j_N}(k)$$

Bemerkung: Bei Pseudotensoren ist die rechte Seite mit $\det D$ zu multiplizieren.

Faltungstheorem

$$\varphi_{1,2} \in \mathcal{L}$$

$$\psi(x) = \int d^d y \, \varphi_1(x-y)\, \varphi_2(y)$$

$$= \varphi_1 \otimes \varphi_2 \qquad (\text{Faltung})$$

$$\hat{\psi}(k) = \hat{\varphi}_1(k) \cdot \hat{\varphi}_2(k) \qquad (\text{Produkt})$$

Beweis:

$$\hat{\psi}(k) = \int d^d x \, e^{ikx} \left[\int d^d y \, \varphi_1(x-y)\, \varphi_2(y) \right]$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int d^d x \int d^d y \; e^{ik(x-y)} \varphi_1(x-y) \; e^{iky} \varphi_2(y)$$

$$= \int d^d z \, e^{ikz} \varphi_1(z) \int d^d y \, e^{iky} \varphi_2(y)$$

$$= \hat{\varphi}_1(k) \cdot \hat{\varphi}_2(k)$$

Lemma: $\int \varphi(y)\, \hat{\psi}(y)\, d^d y = \int \hat{\varphi}(k)\, \psi(k)\, d^d k$

Beweis:

$$\int \varphi(y) \int e^{iyk} \psi(k)\, d^d k \, d^d y$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=} \int d^d k \, \psi(k) \underbrace{\int d^d y \, \varphi(y)\, e^{iky}}_{= \hat{\varphi}(k)}$$

Anwendung

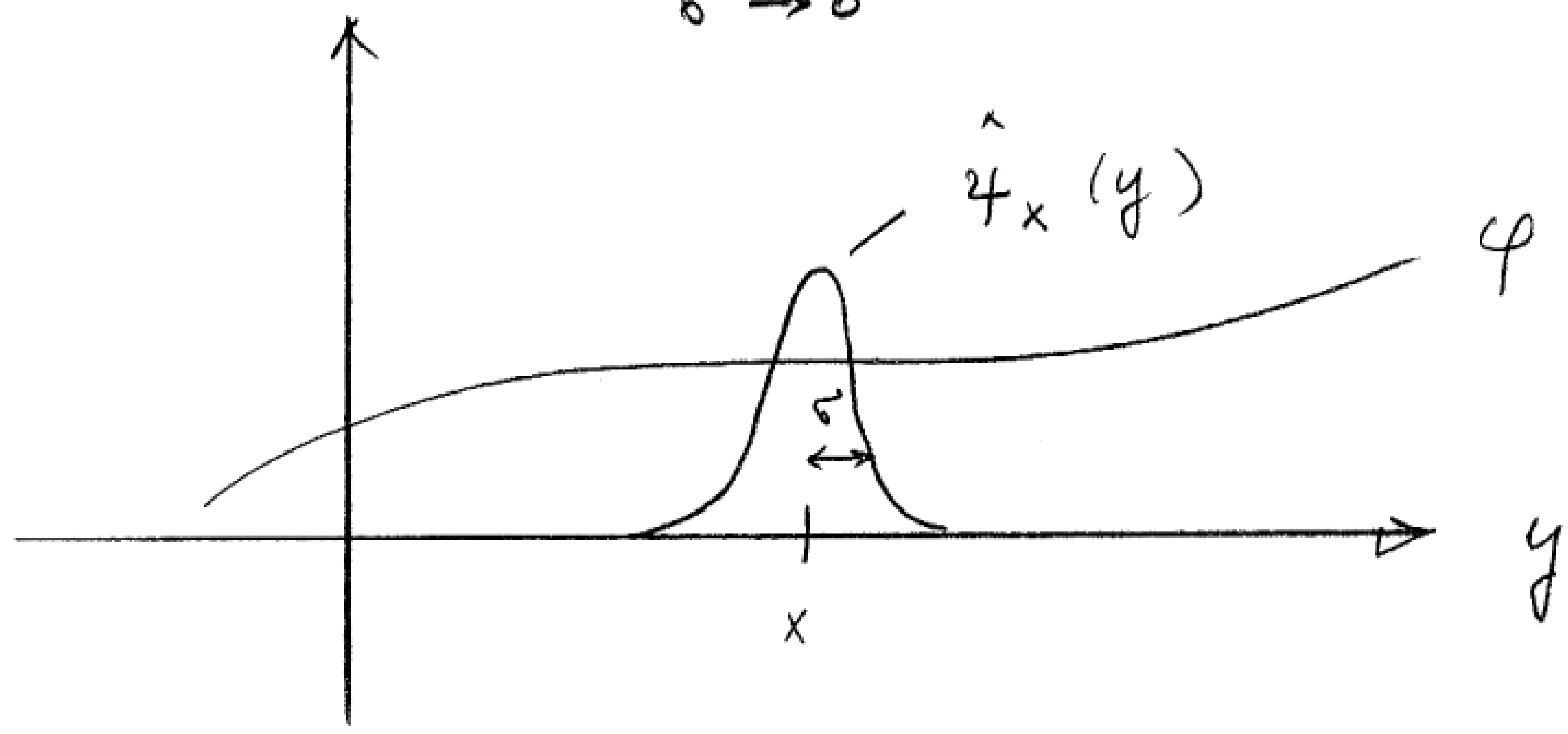
$$\Psi_x(k) = e^{-ikx}\, e^{-k^2\sigma^2/2}$$

$$\hat{\Psi}_x(y) \overset{(9)}{\underset{(5)}{=}} \left(\sqrt{2\pi}\,\frac{1}{\sigma}\right)^d \exp\left(-\frac{1}{2}(y-x)\,\frac{1}{\sigma^2}\right)$$

$$\int \hat{\varphi}(k)\,\Psi_x(k)\,d^dk \xrightarrow{\sigma \to 0} \int \hat{\varphi}(k)\,e^{-ikx}\,d^dk$$

$$\int \varphi(y)\,\hat{\Psi}_x(y)\,d^dy = \varphi(x_\sigma)\int \hat{\Psi}_x(y)\,dy$$

$$\xrightarrow[\sigma \to 0]{} \varphi(x)$$



Umkehrtheorem

Für $\hat{\varphi}(k) = \int d^dx\, e^{ikx}\,\varphi(x)$

so gilt $\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int d^dk\, e^{-ikx}\,\hat{\varphi}(k)$

$$\hat{\varphi}(k) = F[\varphi](k)$$

$$\varphi(x) = F[\hat{\varphi}](-x)\,\frac{1}{(2\pi)^d}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\int f^*(y)\, g(y)\, d^dy = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}^*(k)\, \hat{g}(k)\, d^dk$$

Beweis: aus Lemma mit

$$\underbrace{\varphi = f^*}_{\downarrow\; \hat{\varphi}(k) = \hat{f}(-k)^*} \quad \text{und} \quad \underbrace{g = \hat{\psi}}$$

Lemma

$$\int f^*(y)\, g(y)\, d^dy$$
$$= \int \varphi(y)\, \hat{\psi}(y)\, d^dy$$
$$= \int \hat{\varphi}(k)\, \psi(k)\, d^dk$$
$$= \int \hat{f}(-k)^* \frac{1}{(2\pi)^d}\, \hat{g}(-k)\, d^dk$$

$\circledast$ NR:
$$\hat{g}(k) = \int d^dx\, e^{ikx}\, g(x)$$
$$= \int d^dx\, e^{ikx}\, \hat{\psi}(x)$$
$$= \psi(-k) \cdot (2\pi)^d$$

$$\underset{k \to -k}{=} \frac{1}{(2\pi)^d} \int \hat{f}(k)^*\, \hat{g}(k)\, d^dk .$$

Lösung der 3d Helmholtzgleichung

$$\boxed{\left[\kappa^2 - \Delta\right] \psi(\vec{x}) = 4\pi \rho(\vec{x})}$$

$\operatorname{Re} \kappa > 0$

Im Fourierraum gilt

$$\left(\kappa^2 - k^2\right) \hat{\psi}(\vec{k}) = 4\pi \hat{\rho}(\vec{k})$$

und folglich

$$\boxed{\hat{\psi}(\vec{k}) = \frac{4\pi}{\kappa^2 + k^2} \hat{\rho}(\vec{k})}$$

Definiere die Greensche Funktion

$$\hat{G}_\kappa(\vec{k}) := \frac{4\pi}{\kappa^2 + k^2}$$

$$\boxed{G_\kappa(\vec{x}) = \frac{1}{r} e^{-\kappa r}} \quad \text{(siehe oben)}$$

$\hat{\psi}(\vec{k})$ ist dann Produkt aus Ladungsdichte im Fourierraum und $\hat{G}_\kappa(\vec{k})$. Nach dem Faltungstheorem gilt dann

$$\boxed{\psi(\vec{x}) = \int d^3y \; G_\kappa(\vec{x} - \vec{y}) \, \rho(\vec{y})}$$